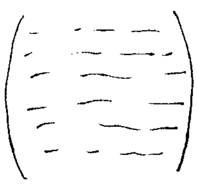
Миша | 26.04.05

Биматроиды и разложение Брюа

Матроид – конечное множество



комб. структура, кот. отражает св-ва лин. зависимости строк

<u>Опр. 1</u> Матроид – кон. мн-во с системой подмножеств (<u>базисов</u>) т.ч. $\forall$ базисов B_1, B_2 и $\forall x \in B_1 \setminus B_2$ $\exists\, y \in B_2 \setminus B_1$: $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ – базис

<u>Опр. 2</u> $\exists\, L$ – лин. упор. мн-во; $A, B \subseteq L$

$A \leq B$ в порядке Гейла $\Longleftrightarrow \forall x \in L\ \#(A \cap (-\infty, x]) \geq \#(B \cap (-\infty, x])$ } порядок Гейла

$\forall$ лин. порядка на матроиде $\exists$ наим. базис (в порядке Гейла), и все базисы равномощны (как и в в.п. – „т. Штейница о замене", сказал Н. А.)

горящие путевки: Cetraro, June 6-11, 2005

$\underbrace{\qquad\quad}_{B_1\setminus\{x\}}\underbrace{\qquad\quad}_{B_2\setminus B_1}\underbrace{\;}_{x}$

Если B – наим. базис, то $B \supset B_1 \setminus \{x\} \Rightarrow B = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$, где $y \in B_2 \setminus B_1$

<u>Цикл</u> – min зависимое множество

<u>~~Независимое мн-во~~</u> – то, которое содержится в базисе

<u>Опр. 3</u> Лото, пенсионерский набор

Пусть столбцы ЛНЗ. Строки обр. базис $\Longleftrightarrow \det \neq 0$

J. P. S. Kung (1978) (Н. А. знает китайца из Н. Зеландии, кот. зовут Warren Wong)

(Joseph) (Кен, если кореец)

A. Schrijver (1979, написано в 1976)

<u>биматроид</u> Linking system

показывает, какие вообще миноры матрицы равны нулю

биматроид между множествами L и R (конечными) – набор S пар (U, V), где $U \subseteq L$, $V \subseteq R$, $\#U = \#V$, т.ч.

минор

$(\varnothing, \varnothing) \in S$, $\forall (U, V), (U', V') \in S$, $\forall x \in U' \setminus U$

$\exists\, y \in U \setminus U'$: $((U \setminus y) \cup x, V) \in S$ и $((U' \setminus x) \cup y, V') \in S$

или

$\exists\, z \in V' \setminus V$: $(U \cup x, V \cup z) \in S$ и $(U' \setminus x, V' \setminus z) \in S$

$\forall$ прямоуг. матрица $M = b_1 u b_2$,

где b_1 – нижнетреуг. квадр. матрица, b_2 – верхнетреуг. квадр.

u – <u>матрица псевдобиекции</u> (0,1)-матрица, в $\forall$ стр. и столбце не более одной единицы

u – опр. однозначно | – находится из знания, какие миноры M невырождены!!!

L, R – лин. упор., $x \in R$ $R[x]$ – начальный отрезок до x.

$\measuredangle$ $\{U \subseteq L \mid \exists V \subseteq R[x] : (U, V) \in S\}$. Несложно показать

– сем-во независимых мн-во матроида на L.

– это $S|R[x]$

Пусть U_r — наим. базис $S|R[x]$

$\Rightarrow$ если r' покрывает r ($r' > r$ на единицу),

то либо $U_{r'} = U_r$, либо $U_{r'} = U_r \cup \ell$

Пусть U — (0,1)-матрица, содержащая 1 на позициях (ℓ, r')

Пусть W_L — перестановка строк ($w_1 \in Sym(L)$)

W_R — перестановка столбцов

ф-ция $f(w_L, w_R)$: $w_L M w_R \in B_L^- f(w_L, w_R) B_R$

Если мы знаем f, то знаем биматроид.

но функций слишком много

Условие на f: /* для U_1, U_2 — псевдобиекций

$U_1 \leq U_2 \Leftrightarrow \forall r \in R \quad U_1 R[r] \leq U_2 R[r]$ */

$f(w_L, w_R) R[r]$ — базис матроида $w_L S w_R | R[r]$

$\Downarrow$

$w_L' f(w_L, w_R) R[r]$ — базис $w_L' w_L S w_R | R[r]$

$\Downarrow$

$w_L' f(w_L, w_R) R[r] \geq f(w_L' w_L, w_R) R[r]$

$\Downarrow$

$$\boxed{\begin{gathered} w_L' f(w_L, w_R) \geq f(w_L' w_L, w_R) \\ f(w_L, w_R) w_R' \geq f(w_L, w_R w_R') \end{gathered}}$$

— достаточно, чтобы восстановить биматроид

www.math.unifi.it/~cime/Courses/2005/01.html