Tits:

- Classification of Algebraic Semisimple Groups, 1966
- Strongly Inner Anisotropic Forms of Simple Algebraic Groups, 1989

Расщепимые полупростые группы (AKA группы Шевалле)

есть Φ, $P(\Phi)/Q(\Phi) \geqslant C$ — с точностью до сопряженности в группе внешних автоморфизмов

коцентр

$G_C(\Phi, -)$ — групповая схема над $\mathbb{Z}$

$G_C(\Phi, K)$ — алг. группа над K

расщепимая

Скрученные формы

K/k — расширение Галуа $\qquad K = k^{sep}$ — обычно

G — алг группа над k

G' — скрученная форма G, если $G_K \cong G'_K$

$G_K = G \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} K$

коэф. над k $\rightsquigarrow$ коэф. над K.

Сверхзадача — описать скрученные формы групп Шевалле

Маленькая подзадача — описать квадратичные формы над k

Индекс Титса

$$C = P(\Phi)/Q(\Phi) \Rightarrow G_{sc}$$
$$C = 1 \Rightarrow G_{ad}$$

$\exists\, G$ — над k

$T_K \leq G_K$ над K

расщепимый максимальный тор

— его можно выбрать в виде T_K, где T определен над k.

т.е. тор, инвариантный отн-но $Gal(K|k) = \Gamma$

G — группа Шевалле $\Leftrightarrow$ можно выбрать T так, чтобы он был расщепимым.

$\alpha \in \Phi \rightsquigarrow \exists\, X_\alpha \leq G_K : \forall t \in T_K$

$X_\alpha = \{x_\alpha(a), a \in K\} \cong G_a(K)$

1. $x_\alpha(a)\, x_\alpha(b) = x_\alpha(a+b)$
2. $t\, x_\alpha(a)\, t^{-1} = x_\alpha(\alpha(t)\cdot a)$

$$\Phi \leq X^*(T_K)$$
$$P(\Phi) = X^*(T_K)$$

Γ действует на $X^*(T_K)$, переводит корни в корни (т.к. T определен над k)

Хотим определить действие Γ на диаграмме Дынкина

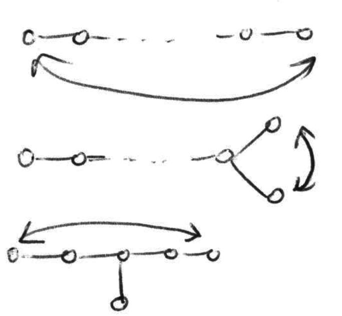
$\Pi \subset \Phi$ — простые корни

$\gamma \in \Gamma$ $\quad \gamma\Pi \neq \Pi$, вообще говоря

но $\gamma\Pi$ — базис Φ

$\to \exists!\, w_\gamma \in W_\Phi : w_\gamma \gamma \Pi = \Pi$ (w зависит от γ)

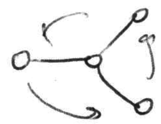
опр. $\gamma * \alpha := w_\gamma \gamma \alpha$



A_l

D_l

Trialitarian algebras



$D_4 \to S_3$

тип группы: система + порядок образа γ при $*$-действии

${}^1\Phi$ (${}^1A_l$), ${}^2A_l$, ${}^2D_l$, ${}^6D_4$, ${}^3D_4$, ${}^2E_6$

Группа внутреннего типа — если $*$-действие тривиально

G, G', $\quad G_K \cong G'_K$,

$\varphi: G_K \to G'_K$ — изоморфизм

как „описать" все G' в терминах G и Γ?

$$\begin{tikzcd} G_K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & G'_K \arrow[d, "\gamma"] \\ G_K \arrow[r, "\varphi"] & G'_K \end{tikzcd}$$

γ действует на φ сопряжением

— некоммутативная диаграмма

насколько она некоммутативна

$\tau(\gamma) = \varphi^{-1} \circ \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}$

уравнение 1-коцикла

$[a, bc] = [a, b] \cdot {}^b[a, c]$

$a b \cancel{a^{-1}} b^{-1} b a c a^{-1} c^{-1} b^{-1}$

$\tau(\gamma\delta) = \varphi^{-1}\gamma\delta\varphi\gamma^{-1} = \varphi^{-1}\gamma\varphi\tau(\delta)\gamma^{-1}$

$= \tau(\gamma) \cdot {}^\gamma\tau(\delta)$

$\tau: \Gamma \to Aut(G_K)$ — 1-коцикл

$\tau = 1 \rightsquigarrow$ диаграмма коммутативна $\rightsquigarrow \varphi$ спускается до изоморфизма G и G'.

$\varphi \rightsquigarrow \varphi \circ \theta$, $\theta \in Aut(G_K)$

Если τ опр. при помощи $\varphi \circ \theta = 1$, то $\varphi \circ \theta$ спускается до изо. G и G'

Если $\exists\, \theta : \tau = \theta^\gamma(\theta^{-1})$, то $G \cong G'$

$\theta^{-1}\varphi^{-1}\gamma\varphi\theta\gamma^{-1} = 1$

$\varphi^{-1}\gamma\varphi\gamma^{-1} = \theta\, {}^\gamma(\theta^{-1})$ — 1-кограница

→ все G' описываются

$$H^1(\Gamma, \underset{\text{только алгебраические}}{Aut(G_K)}) = \text{"}Z^1/B^1\text{"}$$

неабелевы когомологии

Z^1 – мн-во всех коциклов

т.е. G' задается 1-коциклом $\tau : \Gamma \longrightarrow Aut(G_K)$; $\tau(\gamma\delta) = \tau(\gamma)\cdot{}^{\gamma}\tau(\delta)$

$G' = {}_{\tau}G$

${}_{\tau}G \cong {}_{\sigma}G \iff \sigma^{-1}\tau$ является 1-границей

т.е. $\exists\theta : \sigma^{-1}\tau(\gamma) = \theta\cdot{}^{\gamma}(\theta^{-1})$

$H^1(\Gamma, Aut(G_K))$ – мн-во с отмеченной точкой

типа описание всех скрученных форм.

Можно ли вложить $H^1(\Gamma, Aut(G_K)) \hookrightarrow H^n(\Gamma, \mu_m)$

корни m-ой степени из 1.

G-группа Шевалле $\Rightarrow Aut(G_K) = \underset{\text{внутренние}}{(G_K)_{ad}} \rtimes \underset{\text{внешние}}{Aut(\mathcal{D})}$

диагр. Дынкина.

$\Gamma \longrightarrow (G_K)_{ad} \rtimes Aut(\mathcal{D}) \longrightarrow Aut(\mathcal{D})$ – гомоморфизм.

совпадает с $*$-действием. – УПРАЖНЕНИЕ

группы <u>внутреннего</u> типа $\iff$ когомологии с коэфф. в $(G_K)_{ad}$

т.е. только внутр. автоморфизмы

группа <u>строго внутреннего типа</u> $\iff$ если коцикл приходит из G_{sc}: $H^1(\Gamma, (G_K)_{sc})$

||

все фунд. представления ϖ_i определены над k.

над K

ω-доминантный вес, V_ω – модуль Вейля

$G_K \longrightarrow GL(V_\omega)$ $\quad \exists\ \omega_i$ – базис $P(\Phi)$, двойственный к $\alpha_i^\vee$

$G_K \longrightarrow GL(V_{\omega_i})$

${}_{\tau}G_K \longrightarrow$ (~~центр. прост. алгебра~~ над k)* $SL_1(\mathcal{D}_i)$

секрет: группы типа ${}^1A_\ell = \cancel{\mathcal{D}^*}$, где $\mathcal{D}$ – центральная простая алгебра размерности $(\ell+1)^2$

$SL_1(\mathcal{D})$ – элементы нормы 1.

$\mathcal{D}_i$ – <u>алгебра Титса</u>; ~~G~~ $\longrightarrow$ набор $\mathcal{D}_i$

она внутреннего типа и
Группа строго внутреннего типа $\Leftrightarrow$ все D_i — матричные алгебры.

$$1 \longrightarrow Cent(G_k) \longrightarrow G_k \longrightarrow (G_k)_{ad} \longrightarrow 1$$

— точная последовательность алгебраических групп.

$$H^1(\Gamma, G_k) \longrightarrow H^1(\Gamma, (G_k)_{ad}) \longrightarrow H^2(\Gamma, Cent(G_k))$$

$$\tau \longmapsto 1$$

приходит слева $\Uparrow$

$\forall i \quad \omega_i : Cent(G_k) \longrightarrow k^*$

$$\to H^2(\Gamma, Cent(G_k)) \xrightarrow{\beta_i} H^2(\Gamma, k^*) = Br(k)$$

$\beta_i(G) \in Br(k)$

все $\beta_i(G)$ — тривиальны

$\beta_i(G)$ — инвариант Брауэра для D_i

G — односвязная группа внутреннего типа E_6

(E_6, ω_1) — 27-мерное

G — строго внутр. $\Leftrightarrow$ это опр. над $k \Leftrightarrow G \cong$ ~~...~~ $Aut(N_J)$

J — йорданова алгебра

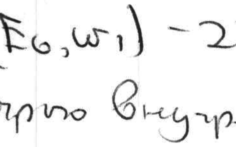
N — норма (куб. форма)

$2\omega_1 = \omega_j \pmod{Q(\Phi)} \to \beta_j = \beta_i^2$

Строго внутр. типа A_ℓ? — все расщепимы $SL_1(D)$ алг. типа, отвечающие ω_1.

$P(\Phi)/Q(\Phi)$ $\quad$ M — матрица Картана

$$M \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix}$$



$\circ$ — все порождается ω_1

2a
2 2 2 2 2

$P(\Phi)/Q(\Phi)$, как правило, циклическая

кроме $\Phi = D_{2m} \sim C_2 \times C_2$

D_ℓ

$\forall$ случай, когда V_W, определено над k

$\rightsquigarrow D_\ell$ — авт. $Aut(Q)$, Q — ~~[illegible]~~ (non-singular) неособая квадр. форма

Когда она внутренняя? $\Leftrightarrow \operatorname{disc}(Q) = 1$ (в $k^*/(k^*)^2$) $\quad (Q \in I^2)$

Когда она строго внутренняя?

$$Cl^+(Q) = Cl_0^+(Q) \times Cl_1^+(Q) \qquad Cl_+^{ev}(Q), \; Cl_-^{ev}(Q) \text{ — матричные алгебры}$$

центральные простые алгебры

$$Cl^{ev}(Q) = Cl_+^{ev}(Q) \times Cl_-^{ev}(Q)$$

в терминах группы Витта

$(Q \in I^3)$

T_k, $\quad T$ — (нерасщепимый) макс. тор.

Вдруг есть S — расщепимый тор, но не обяз. максимальный

S_k

Над K мы знаем классы сопряженности расщепимых торов

$\Theta \subset D$, инвар. относительно $*$ — действия (чтобы он приходил из k)

$$S_\Theta = \Big(\bigcap_{i \in D \setminus \Theta} \operatorname{Ker} \alpha_i\Big)^0 \text{ — подтор в } T_K.$$

$$\Theta = \varnothing \rightsquigarrow S_K = (\text{центр } G_K)^0 = 1$$

$$\Theta = D \rightsquigarrow S_K = T_K$$

~~[illegible]~~

Каждый S_K сопряжен с каким-то S_Θ

Иногда $\Theta \neq \Theta'$, но S_Θ сопр. с ~~[illegible]~~ $S_{\Theta'}$:

$D \setminus \Theta \cong D \setminus \Theta'$ как диаграммы — необходимое усл-е

достаточное: если

$\Theta \supset \Theta_0$

$\underline{D \setminus \Theta_0} \supset D \setminus \Theta$

есть opposition involution (инволюция Вейля?):

$$w_0(\alpha_i) = -\alpha_{op(i)}$$

Тогда если $op(D \setminus \Theta) = (D \setminus \Theta) \rightsquigarrow \Theta \sim \Theta'$

$op \neq id$ для A_ℓ, E_6, D_{2m+1}

Вершины из Θ обводятся (верш. из $D \setminus \Theta$ закрашены)

<u>Индекс Титса</u> $= \langle D, *, \Theta \rangle$

S — макс. среди расщепимых торов

$S_K \sim S_\Theta \quad \Theta \sim \Theta' \Rightarrow \Theta = \Theta'$

$\boxed{\text{Задача: Понять, какие возможные индексы Титса}}$

(хотя бы над каким-то полем)

— над $\mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3, t_4)$

Ответ для строго внутренних:

$(\mathcal{D}, * = id, \Theta)$ реализуется как индекс строго внутр. группы

$\Updownarrow$

в $\mathcal{D} \setminus \Theta$ нет подсистем типов A_e, C_e. и D_5