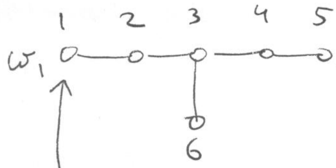
13.04.2007

Витя Петров - 2



27-мерное „естественное"

контраградиентное

поправка про „Z_1/B_1":

$$\begin{tikzcd} G_K \arrow[r] \arrow[d] & G'_K \arrow[d] \\ G_K \arrow[r] & G'_K \end{tikzcd}$$

$\varphi^{-1}\gamma\varphi\gamma^{-1}$

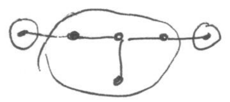
$\varphi \rightsquigarrow \varphi\circ\Theta \rightsquigarrow$

$\Theta^{-1}\varphi^{-1}\gamma\varphi\gamma^{-1}({}^{\gamma}\Theta)$

$\forall$ коцикл $\delta \sim \Theta^{-1}\delta\cdot{}^{\gamma}\Theta$

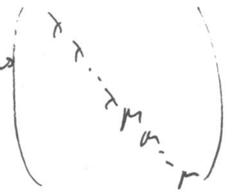
$H^1 = Z^1/\sim,\ \Theta\in \mathrm{Aut}(G_K)$

Индекс Титса:

E_6  $\longrightarrow D_4$ - анизотропное ядро

$S \le T$ — нерасщепимый; S — max расщепимый

$\trianglelefteq C_G(S)$

$S \hookrightarrow$ 

$\rightsquigarrow$ $C_G(S)$ 

редуктивная (Levi part?!)

(фактор часть подгруппа) Леви

$\Theta \longleftrightarrow$ параболическая подгруппа $P = \langle B, \cancel{\alpha} \rangle$

$C_G(S)$ — подгруппа Леви B $\cdot$ $\cancel{\alpha}$

$\langle X_\alpha, \alpha\in\Phi^+\rangle\cdot T \quad \langle X_{-\beta}, \beta\in\Theta\rangle$

— неправильно, на самом деле $\langle X_{-\beta}, \beta\in \mathbb{Z}\Theta\cap\Phi^+\rangle$

$P = U \rtimes C_G(S)$ $\quad U = \langle X_\alpha \mid \alpha\notin \mathbb{Z}\Theta\cap\Phi^+, \alpha\in\Phi^+\rangle$ — унипотентный радикал

$[C_G(S), C_G(S)] =: L(S)$ — <u>анизотропное ядро</u>

полупростая группа с диаграммой Дынкина $D\setminus\Theta$

<u>Теорема а-ля Витт</u> (Witt type theorem)

G, G' : $D\cong D'$ вместе со $*$-действием

$\Theta\mapsto\Theta'$ $\qquad C(G) = C(G')$ (в $P(\Phi)/Q(\Phi)$) центры

$L(S)\xrightarrow{\sim} L(S')$ — задан, согласованный с $D\cong D'$

тогда оно продолжается до изоморфизма G и G'.

<u>Удивительная теорема</u>

Хотим построить группу строго внутреннего типа по индексу Титса и по заданному анизотропному ядру G_{an}. Это можно сделать $\Leftrightarrow$ G_{an} — строго внутреннего типа.

Хотим построить E_8: 

Для этого достаточно построить анизотропную строго внутр. группу типа E_7.

Вернемся в прошлый раз:

<u>Теорема</u> / Индекс Титса реализуется некоторой группой строго внутр. типа

$\Updownarrow$

$\mathcal{D}\setminus\Theta$ не содержит A_l, C_l, D_5.

$\Downarrow$

($\exists$ анизотропная строго внутр. группа типа $\mathcal{D} \iff \Phi \neq A_l, C_l, D_5$)

Почему нет A_l, C_l, D_5?

A_l: $H^1(k, SL_{l+1}) = 0$ — почти что теорема Гильберта 90. (+ точная последовательность)

$$1 \longrightarrow SL_{l+1} \longrightarrow GL_{l+1} \longrightarrow G_m \longrightarrow 1$$

$H^1(k, GL_n) = 0$

скруч. формы K^n

$\shortparallel$

проективный модуль ранга n над K

C_l: $H^1(k, Sp_{2l})$ = скрученные формы симплектического пространства

Над полем такое только одно $\Rightarrow 0$

D_5:  ~ по удив. теореме ~ Но такого индекса Титса не бывает. (должен быть инвариантен отн-но инв. Вейля)

<u>Странный вывод:</u> q — анизотропная форма от 10 переменных над k.

Тогда ее алгебра Клиффорда нетривиальна, т.е.

$$Cl^{ev}(q) \not\cong \underbrace{M_{16}(k)}_{\text{ал. Титса}} \times M_{16}(k)$$

Почему есть остальные?

Для класс. групп: $\exists\, q$ — неправ. алгебра Клиффорда

$\rightsquigarrow \forall\, q \perp N_D$, где D — тело кватернионов

$$Cl(q \perp N_D) = Cl(q) + [D] \quad \text{в } Br(k)$$

можно подобрать поле $(\mathbb{R}(t_1, t_2, t_3, t_4))$ и набрать кватернионов чтобы обнулить Cl

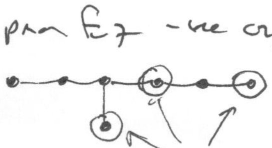
E_8, F_4, G_2 — взять компактные формы над $\mathbb{R}$ (ибо у расширений D нет симметрий $\rightsquigarrow Q(\Phi) = P(\Phi) \to$ ~~все строго~~ все — строго внутренн.)

Остается:

анизотропные строго внутренние типов E_6, E_7

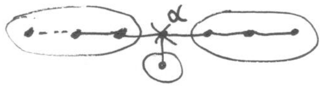
(над $\mathbb{R}$ комп. форма E_6 — внешнего типа)

Комп. форма E_7 — не строго внутр., ее ал. Титса — кватернионы.



$\mathbb{H}$

Хитрая теорема



$A_3 \times A_3 \times A_1$ осталось ~ его можем построить:

$SL_1(D) \times SL_1(D) \times SL_1(\overbrace{[D^{\otimes 2}]}^{D'})$, где D — элемент порядка 4 и степени 4. в $Br(k)$ (над $\mathbb{R}$ такого нет!)

$$[D'] = 2[D]$$

G_0 — расщепимая группа типа E_7

В ней H_0 — полупростая подгруппа, соответствующая этой подсистеме

1. Посчитать коцентр H_0

у H_0 есть односвязное накрытие $\widetilde{H_0}$

$$(\widetilde{H_0})_k \cong (SL_1(D) \times SL_1(D) \times SL_1(D'))_k$$

Возьмем коцикл $\tau \in H^1(k, (H_0)_{ad})$, который соответствует этому изоморфизму

Допустим, что на самом деле

2. $\tau \in H^1(k, H_0)$

Перейдем к полю $k(t')$, $t = (t')^{c_\alpha}$, c_α — коэффициент старшего корня при α

$\rightsquigarrow k(t) \leqslant k(t')$

Рассмотрим $x \in T(G_0)$: $\beta(x) = \begin{cases} 1, & \alpha \neq \beta \\ t', & \alpha = \beta \end{cases} \quad \forall \beta \in D$

$\exists\ \xi$ — внутренний автоморфизм G_0, соответствующий x.

Тогда:

$\xi(H_0) \leqslant H_0$

ξ определен над $k(t)$

формулировка хитрой теоремы:

$\forall \tau \in H^1(k, H_0)$: ${}_{\xi(\tau)}G_0 \qquad {}_{\xi(\tau)}H_0 \cong {}_{\tau}H_0$

~~τH_0 — анизотропно~~

~~ее анизотропное ядро равно τH_0~~

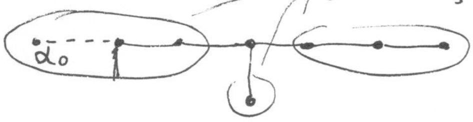
В частности, если τH_0 — анизотропно, то ${}_{\xi(\tau)}G_0$ — тоже.

т.е. остается проверять условие (2).

У нас: $(\widetilde{H_0})_k \cong SL_1(D) \times SL_1(D) \times SL_1(D')$. Почему τ — из $H^1(k, H_0)$?

Надо проверить, что алг Титса $SL_1(D) \times SL_1(D) \times SL_1(D')$, соответствующие образующим коцентра H_0, тривиальны.

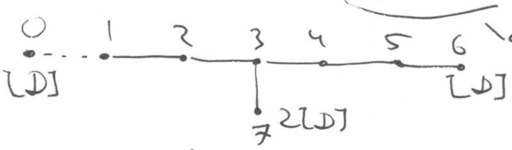
$\mathcal{D}^* = A_3 \times A_3 \times A_1$



Коцентр H — подгруппа в $P(\mathcal{D}^*)/Q(\mathcal{D}^*)$,
порожденная элементами $\varpi^*_\beta - c'_\beta \varpi^*_{\alpha_0}$
и $c'_\alpha \omega^*_{\alpha_0}$, где $c'_\beta = -\alpha_0^\vee(\omega_\beta)$

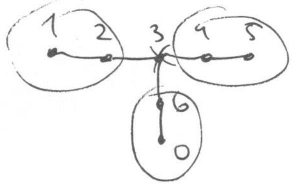
Если нет двойных связей, то $c'_\beta = c_\beta$ — коэфф. старшего корня при β.

~~Тогда~~ У нас $C^*(H_0) = \langle \underbrace{\omega^*_6 - \omega^*_0}_{\text{алг. Титса}=0}, \underbrace{\omega^*_7 - 2\omega^*_0}_{\text{алг. Титса}=0} \rangle$



__Следствие__: если над k $\exists$ тело степени 4 и порядка 4 (в $Br(k)$), то над $k(t)$ есть анизотропная строго внутр. группа типа E_7, а, значит, и E_8:

Построение E_6:



$SL_1(\mathcal{D}) \times SL_1(\mathcal{D}) \times SL_1(\mathcal{D})$,

$\deg \mathcal{D} = 3$, $[\mathcal{D}] \neq 1$.

$H^2(k, \mu_3) = K_2^M(k)/_3$

неприв. элемент?

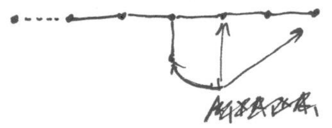
$C^*(H_0) = \langle \omega^*_1 - \omega^*_0, \omega^*_5 - \omega^*_0 \rangle$

__Следствие__: если над k $\exists$ тело степени 3 и порядка 3, то над $k(t)$ есть йорданова алгебра с делением.

Для классических групп все индексы были известны А. Вейлю

Для E_8, F_4, G_2 мы уже знаем (они все строго внутренние)

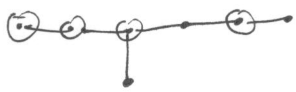
$E_6, {}^2E_6, E_7$:



$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ⟶ могут появиться компоненты типа A_1 и D_5

dim анизотропного ядра

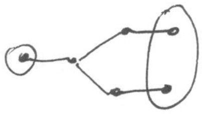
ан. ядро — бывает над



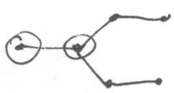
$A_1 \times A_1 \times A_1$ — $\mathbb{R}$ — $E^{9}_{7,4}$ — сколько вершин обведено (кол-во орбит)

$D_4 \times A_1$ — числовые поля

$D_5 \times A_1$ — нужна форма q от 10 переменных: $Cl(q)$ — кватернионная (см. Bruhat, Tits)



$\left({}^2E^{16}_{6,2}\right)'$



$\left({}^2E^{16}_{6,2}\right)''$