Игорь Певзнер
27.04.2007

Тройки корневых подгрупп

$g \in SO(2n, K)$ — (длинный) корневой элемент:

$g = T_{u,v}(\xi) = E + u\xi\hat{v} - v\xi\hat{u}$, $\langle u, v\rangle$ — двумерное изотропное:

$V_g = \mathrm{Im}(g - E) = \langle u, v\rangle$

$\hat{u} \cdot u = 0$
$\hat{v} \cdot v = 0$
$\hat{v} \cdot u = 0$

Теорема Пусть X_1, X_2, X_3 — корневые подгруппы в $SO(2n, K)$, причем X_1 и X_2 противоположны. Пусть $G = \langle X_1, X_2, X_3\rangle$. Тогда:

1. $G \cong SL(2, K)$
2. $G \cong SL(2, K) \times K$
3. $G \cong SL(2, K) . K^2$
4. $G \cong (SL(2, K) . K^2) \times K$
5. $G \cong SL(2, K) . Y$
6. $G \cong (SL(2, K) . K^4) \times K$
7. $G \cong SL(2, K) . ?$
8. $G \cong SL(3, K)$
9. $G \cong SU(3, K)$, $[L : k] = 2$

Лемма 1 X_1, X_2, X_3 — корневые подгруппы в $SO(2n, K)$, $n \geq 5$, причем X_1 и X_2 противоположны. Тогда $\exists g \in SO(2n, K)$:
$gX_1g^{-1}, gX_2g^{-1}, gX_3g^{-1} \in Q$, Q — подгрупа, порож. X_β, $\beta = \pm\alpha_i$, $n-3 \leq i \leq n$

Лемма 2 X_1, X_2, X_3 — корневые подгруппы в $SO(8, K)$, причем X_1, X_2 — противоположны. Тогда пара $(\langle X_1, X_2\rangle, X_3)$ сопряжена с $(\langle X_\beta, \beta = \pm\alpha_1\rangle, g)$, причем V_g = одно из них

(1) $\langle e_3, e_4\rangle$; (2) $\langle e_3, e_{-4}\rangle$ (3) $\langle e_1, e_{-4}\rangle$ (4) $\langle e_1 + e_3, e_{-4}\rangle$ (5) $\langle e_1 + e_3, e_4\rangle$

(6) $\langle (1,0,1,0,0,-a,0,a), e_4\rangle$ (7) $\langle e_1, e_2\rangle$ (8) $\langle e_1, e_{-2}\rangle$

(9) $\langle e_1, e_2 + e_{-3}\rangle$ (10) $\langle e_1, e_{-3} + e_{-2}\rangle$ (11) $\langle e_1 + e_3, e_2 + ae_4\rangle$

(12) $\langle e_1 + e_3, e_2 + ae_{-4}\rangle$ (13) $\langle e_1 + e_3, e_{-2} + ae_4\rangle$ (14) $\langle e_1 + e_3, e_{-2} + ae_{-4}\rangle$

(15) $\langle e_1 + e_3, -e_{-3} + e_{-1}\rangle$ (16) $\langle e_1, (0,1,1,0,0,-a,a,0)\rangle$

(17) $\langle e_1 + e_3, (0,1,0,b,c,0,-bc,0)\rangle$

(18) $\langle (1,0,1,0,0,-a,0,a), (0,1,0,b,c,0,-bc,0)\rangle$, $a\,b_c \notin K^2$