9.10.2007

Н.А. Вавилов

Хотим описать автоморфизмы $G_P(\Phi, R)$

Что известно?

твердо: случай R - поле

$Q(\Phi) \leq P \leq P(\Phi)$

$G_{ad}(\Phi, R)$ (т.е. $P = Q(\Phi)$)

① $G_P(\Phi, -)$ – функтор

ρ $E_P(\Phi, -)$ – тоже!

$\varphi : R \longrightarrow S \rightsquigarrow \varphi : G_P(\Phi, R) \longrightarrow G_P(\Phi, S)$

$\to$ кольцевой автоморфизм

② Внутренний автоморфизм

$i(g)$ $GL_n(R) = GL(n, R)$

$\not\Downarrow$

$PGL_n(R) \neq PGL(n, R) = GL(n, R)/R^*$

$(GL_n/C(GL_n))(R)$

$x \longmapsto gxg^{-1}$

$g \in GL(n, S)$: S/R - расширение

заведомо в качестве S

можно брать (если R-нетерово)

$S = \prod_{I \in Max(R)} \hat{R}_I$

На самом деле $R \hookrightarrow \prod R_I$

(пополнения, как у Абэ, не нужны)

– над локкольцом не нужно пополнения;

потому что проективные свободны

$1 \longrightarrow G_m \longrightarrow GL_n \longrightarrow PGL_n \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow R^* \longrightarrow GL_n(R) \longrightarrow PGL_n(R) \longrightarrow H^1(R, G_m)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| \; Pic(R)$

③ Графовый автоморфизм

δ $x_\alpha(\xi) \longmapsto x_{\sigma(\alpha)}(\pm\xi)$

$\mathbb{Z}[G] \subset \mathbb{C}[G]$ — алг. Хопфа

④ Центральный автоморфизм

$\varphi : G \longrightarrow G$

$g^{-1}\varphi(g) \in C(G)$

$\| \; x(g)$

$\varphi(g) = x(g)g$

$x : G \longrightarrow C(G)$

Теорема $\rho \circ d \circ b \circ i(g) \circ \chi$

Любой автоморфизм группы $G_P(\Phi, R)$ является стандартным (при каких-то условиях)

$\quad SL(3, R)$

$SL(3,2) \cong PSL(2,7)$

$Sp(4,2) \cong S_6$

$G_2(3)$

Н.А. верит, что это доказано в следующих случаях:

① R — поле, кроме явно перечисленных совсем маленьких исключений

R. Steinberg, 1961 — для конечного (строение p-подгруппы)

J. Humphreys, 1969(?) — для бесконечного (т. Бореля–Титса)

② $\Phi = A_l$, $l \geq 3$ — Петечук

$\Phi = D_l$, $l \geq 5$ — Голубчик

R — любое кольцо

Лемма 1 Достаточно доказать для элементарной подгруппы

Лемма к лемме Если $rk\,\Phi \geq 2$ и у R нет полей вычетов $\mathbb{F}_2$ при $\Phi = B_2, G_2$, то $E(\Phi, R)$ — вполне характеристична в $G(\Phi, R)$ ($\Leftrightarrow E$ совершенна)

// Vaserstein или Vavilov (Hazrat)

Д-во леммы 1 $\quad \varphi \in Aut(G_P(\Phi, R))$

$\varphi|_{E_P(\Phi,R)}$ — стандартный $\rightsquigarrow$ поднимается до $G_P(\Phi, R)$

$\rightsquigarrow$ м. считать, что $\varphi|_{E_P(\Phi,R)} = id$

$\forall x \in E(\Phi, R)$, $g \in G(\Phi, R)$ $\quad gxg^{-1} \in E(\Phi, R)$

$gxg^{-1} = \varphi(gxg^{-1}) = \varphi(g) x \varphi(g^{-1}) \rightsquigarrow x = g^{-1}\varphi(g)\, x\, (g^{-1}\varphi(g))^{-1} \Rightarrow g^{-1}\varphi(g) \in C(G)$ ∎

Лемма 2 Достаточно — для присоединенной элементарной

$G \longrightarrow G/_{C(G)}$ $\qquad E_P(\Phi, R) \longrightarrow E_{ad}(\Phi, R)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cup$

автом. $G \rightsquigarrow$ авт. $G/_{C(G)}$ $\qquad E_P(\Phi, R)/_C$

в ad стандартный, $\vee$ поднимается (даже внутренний!)

Лемма 3 Достаточно — для локального кольца (присоедин. элементарные)

$H^1\left(G(\Phi, R/I), E(\Phi, R, I^n)/E(\Phi, R, I^{n+1})\right) = 1$ — так дальше делает Абэ

$\boxed{\text{Предложение}}$ Предположим, что R полупросто и

1. $E(\Phi, R)$ совершенна
2. В $G(\Phi, R)$ есть станд. описание норм. делителей
3. Для всех фактор-полей R/I ($I \in Max(R)$) имеет место станд. описание изоморфизмов групп $E(\Phi, R/I)$

Тогда автоморфизмы $E(\Phi, R)$ стандартны

$\boxed{\text{Д-во}}$ C_I $E(\Phi, R) \cap C(\Phi, R, I)$, $I \in Max(R)$ — все максимальные нормальные подгруппы

→ автоморфизм осуществл. перестановку $MaxSpec(R)$ — φ

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ E/C_I & \longrightarrow & E/C_{\varphi(I)} \end{array}$$

$$R \hookrightarrow \prod_{I \in Max(R)} R/I$$