Конечные группы и модулярные формы

Г.В. Воскресенская
7.04.2008

Geoffrey Mason

Conway, Norton Monstrous moonshine

$$j(z) = q^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n$$

$q = e^{2\pi i z}$ ← следы представления монстра FG

1. Осн. понятия теории мод. форм

$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$

$\Gamma(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, c \equiv b \equiv 0 (N), a \equiv d \equiv 1 (N) \}$

$\Gamma_0(N) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, c \equiv 0 (N) \}$ — подгруппа Гекке

<u>Опр.</u> Функция $f(z)$ на $\mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0 \}$ называется модулярной формой веса k с характером χ относительно $\Gamma(N) \subseteq \widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$, если

① $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z) \ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}$

$\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$, χ — хар. Дирихле по mod N, $\chi(d) = 0$ $(d,N) > 1$.

② $f(z)$ голоморфна на $\mathcal{H}$ и в параболических вершинах

$s \in \mathbb{Q} \cup \infty$ ← парабол. точки

класс параб. точек отн-но $\widetilde{\Gamma}$ — параб. вершина

<u>$s = \infty$</u> $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a(n) q^n$, $n_0 \geq 0$, $q = e^{2\pi i z}$

<u>$s \neq \infty$</u> $(cz+d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \sum_{n=n_0(s)}^{\infty} b(n) q_N^n$, $n_0 \geq 0$, $q = e^{\frac{2\pi i z}{N}}$

$s_1 = \gamma(s)$, $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$ $\quad \mathrm{ord}_s(f) = \min\{ n : a(n) \neq 0 \}$

$\rightsquigarrow \mathrm{ord}_s(f) = \mathrm{ord}_{s_1}(f)$

Если $\forall$ параб. вершины s $n_0(s) \geq 1 \rightsquigarrow f(z)$ — параболич. форма (cusp form)

$M_k(\widetilde{\Gamma}, \chi)$

$S_k(\widetilde{\Gamma}, \chi)$ — пар. формы

$$f(z)|T_{m,k,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{d|\text{НОД}(m,n)} \left(\chi(d) d^{k-1} a\left(\frac{mn}{d^2}\right)\right) q^n\right)$$

f-собств. $\rightsquigarrow a(mn) = a(m)a(n)$, $(m,n)=1$.

2. η-произведения

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \quad q = e^{2\pi i z}$$

Если $24 \mid \sum a_j t_j$, $a_j \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{N}$, то

$$\prod_j \eta^{t_j}(a_j z) \in S_k(\Gamma_0(N), \chi), \text{ где}$$

$$N:\ 24 \,\Big|\, \sum_j \frac{N t_j}{a_j}$$

$$\chi(d) = \left(\frac{\prod_{j=1}^{s} a_j^{t_j}}{d}\right), \quad d \text{ — нечетно}$$

если d четно, $(d,N)=1 \rightsquigarrow N$ нечетно

$$\to \chi(d) = \chi(d+N)$$

$$k = \frac{1}{2}\sum_j t_j$$

3. Мультипликативные η-произв.

$\boxed{\text{Thm}}$ $\exists$ в точности 28 ~~мод~~ функций, опред. след. условием

1) они явл. параболич. формами целого веса с характерами (с точн. до пропорциональности)

2) порядок в каждой параб. вершине равен 1.

список есть $\underbrace{\eta^{24}(z)}_{\Delta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$

с другой стороны: $\prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$

$a_j, t_j \in \mathbb{N}$, $\sum a_j t_j = 24$, т.ч. $a(mn) = a(m)a(n)$, $(m,n)=1$

— получим еще 28 целого веса и $\eta^3(8z), \eta(24z)$

4. Соответствие через Frame-shape

Пусть $\Phi : G \longrightarrow GL(V)$

$$24 \mid \dim V$$

— точное представление такое, что

$$\forall g \in G \quad \rho_g(x) = \prod_j (x^{a_j} - 1)^{t_j}.$$

$$a_j \in \mathbb{N},\ t_j \in \mathbb{Z}$$

$$\longrightarrow \prod_{j=1}^{s} \eta^{t_j}(a_j z)$$

$$\dim V = 24\ell$$

Задача Найти min ℓ по G

$\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5 \quad \ell = 2$

$|M_{24}| = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \quad \ell = 1$

5. Категории

$G-MF-SET$

G-фикс. — мн-во мод. форм, ассоциированных с G

Опр Назовем (G, Φ) — множеством модулярных форм набор $\{\eta_g(z)\}_{g \in G}$ сопост. G по правилу выше

Пусть A — (G, Φ)-мн $\{\eta_{g,\Phi}(z)\}_{g \in G}$

B — (G, Ψ)-мн. $\{\eta_{g,\Psi}(z)\}_{g \in G}$

морфизм $\eta_{g,\Phi}(z) \longmapsto \eta_{g,\Psi}(z)$

$S_3 = \langle a, b \mid a^3 = e = b^2,\ b^{-1} a b = a^2 \rangle$

	e	a, a^2	b, ab, a^2b
T_1	1	1	1
T_2	1	1	-1
T_3	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\zeta_3&0\\0&\zeta_3^2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$\Phi = 4T_{per.}$

$\Psi = 8T_1 \oplus 4T_2 \oplus 6T_3$

$$A = \{\eta^{24}(z),\ \underset{\eta_{a,\varphi}(z)}{\underset{\parallel}{\eta^{8}(3z)}},\ \underset{\eta_{a^2,\varphi}(z)}{\underset{\parallel}{\eta^{8}(3z)}},\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z)$$

$$B = \{\eta^{24}(z),\ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),\ \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z),$$
$$\eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),\ \dots\ \}$$

$$\eta_{a,\Phi}(z) \longmapsto \eta_{a,\Psi}(z)$$
$$\eta^{8}(3z) \longmapsto \eta^{6}(3z)\eta^{6}(z)$$

6) Gr − MF − SET

$$\varphi : G \longrightarrow H$$
$$A = (G, \Phi)\text{-мн}$$
$$B = (H, \Psi)\text{-мн}$$
$$h = \varphi(g)$$
$$\eta_{g,\Phi}(z) \longrightarrow \eta_{h,\Psi}(z)$$

7) Редуц. (G, Φ)-множества и описание гр.

т.е. $\{\eta^{24}(z), \eta^{8}(3z), \eta^{12}(2z)\}$ –

как по этому определить группу?

<u>Проблема</u> G – дана. Найти наборы из η-произв., которые являются (G,Φ)-мн-вами и характеризуют G однозначно

$\boxed{\text{Пример}}$ $\{\eta^{24}(z), \eta^{4}(5z)\eta^{4}(z)\}$ однозн. характ. $\mathbb{Z}_5$.

$$\Phi = 4(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_5) \oplus 8T_1$$

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$: $\{\eta^{24}(z), \eta^{12}(2z)\}$ и $\{\eta^{24}(z), \eta^{4}(2z)\eta^{16}(z), \eta^{8}(2z)\eta^{8}(z),$
$\eta^{0}(2z)\eta(z)\}$

Набор η-произв. наз. <u>независимым</u> отн-но группы, если его нельзя вложить ни в одно (G, Φ)-множество

например, $\{\eta^4(5z)\eta^4(z),\ \eta^2(5z)\eta^{14}(z)\}$

(8) $M\eta P$-группы

$\boxed{\text{Утв.}}$ Если $\exists$ гр. G и точн. Φ т.ч.

$\eta_{g,\Phi}(z)$ является мультипликативным η-произведением

то $\forall h = g^l$ $\eta_{h,\Phi}(z)$ также явл. мульт. η-произведением

$\boxed{\text{Пример}}$

$g \longmapsto \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$

$g^3, g^6, g^9, g^{12} \longmapsto \eta^4(5z)\eta^4(z)$

$g^5, g^{10} \longmapsto \eta^6(3z)\eta^6(z)$

$e \longmapsto \eta^{24}(z)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $M\eta P$-группа — это гр. G, для которой $\exists$ точн. Φ:

$G \longrightarrow GL(V)$, $\dim V = 24$ такое, что

$\forall g \in G$ $\eta_{g,\Phi}(z)$ явл.-ся мульт. η-произв.

(1985) M_{24} <u>удалось описать:</u>

а) все абелевы

б) $\langle a, b \mid a^n = b^s = e,\ b^{-t}ab^t = a^n\rangle$, где $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = e$

в) Кон. $M\eta P$-группы — подгр. в $SL(5, \mathbb{C})$, если $\Phi =$

г) $|G| = p^l$, p — неч. простые

д) все гр. порядка 24 явл. $M\eta P$-группами

е) $|G| \leq 32$

9.

$\boxed{\text{Thm}}$ Пусть Ad — присоед. предст. $SL(5,\mathbb{C})$

$g \in SL(5,\mathbb{C})$, $ord(g) < \infty$

$ord(g) \neq 3, 6, 9, 21$,

х. многочлен $Ad(g)$

$$P_g(x) = \prod_{b_j} (x^{a_j} - 1)^{t_j}$$

$a_j \in \mathbb{N}$, $t_j \in \mathbb{N}$

Тогда $\eta_{g,Ad}(z)$ явл-ся мультиплик. η-произведением

Если $ord(g) = 3, 6, 9, 21$, то

$\eta_{g,Ad}(z)$ является мульт. η-произв. или одной из след. функций:

$3^4 1^{12}$, $3^7 1^3$, $6^2 2^6$, $9^3 3 1^3$, $21 1^3$

10. Ряды Томпсона (Джона)

__Опр.__ Рядом Томпсона для группы G называется ряд

$f(g) = \sum_n \gamma_n(g) q^n$, где $\gamma_n(g)$ — виртуальный характер G,

т.е. $\gamma_n(g) = \sum_j c_j \chi_j$, $c_j \in \mathbb{Z}$

если det табл. характеров $\in \mathbb{Q}$, то любой ряд $\sum a_n q^n$ есть ряд томпсона / константа.

$G = S_3$

$$f(g) = \begin{cases} \eta^{24}(z), & g = e \\ \eta^{8}(3z), & g = a, a^2 \\ \eta^{12}(2z), & g = b, ab, a^2 b \end{cases}$$

$6 f(g)$ — ряд Томпсона

(12) Характеры Вейля групп Ли и хар-ры мод. форм

$$\eta_g(z) = \prod_j \eta^{t_j}(a_j, z), \quad a_j \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{N}$$

$$\Psi_p(g) = \begin{cases} p^{k(g)-1}\chi_g(p), & (\mathrm{ord}\, g, p) = 1 \\ 0, & (\mathrm{ord}\, g, p) \neq 1 \end{cases}$$

$\forall$ простую группу Ли G_0 четного ранга r;

G — такая ком. подгрупп в G_0:

$\forall g \in G$ $\eta_{g,\mathrm{ad}}(z)$ имеет хор. вид

$$ch_{(p-1)\rho} \rightsquigarrow \Psi_p(g) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{r/2} p^{r/2}\, ch_{(p-1)\rho}(g)$$