Н. А. Вавилов
05.05.2008

C_8 – надгруппы класс. групп

$EO(n,R)$ $GL(n,R)$

$Ep(\underset{2l}{\overset{\shortparallel}{n}},R)$ $EU(2l,R,\Lambda)$ $2\in R^*$

Пр. 16 Описать подгруппы в $GL(n,R)$ нормализуемые элементарной класс. группой

Пр. 17 Обобщить на $EO(n,R,f)$

изотр. группа

Пр. 18 Надгруппы $EU(n,R,\mathcal{L})$
без предположения $2\in R^*$

A – кольцо с инволюцией

$$SL(2,A)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in GL(2,A)\;\middle|\;\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \bar d & -\bar b\\ -\bar c & \bar a\end{pmatrix}\right\}$$

$$Ep(2,R)=\left\langle\begin{pmatrix} e & a\\ 0 & e\end{pmatrix},\begin{pmatrix} e & 0\\ a & e\end{pmatrix}, a\in H(A)\right\rangle \quad \bar a=a$$

$$EO(2,R)=\langle(\ \dots\quad a\in AH(A)\rangle \quad \bar a=-a$$

Пр. 19 Описать надгруппы
$Ep(2,A)$ в $GL(2,A)$, $2\in A^*$, 2 орт. идемпотента (нетрив.)

Пр. 20 Описать надгруппы
$EO(2,A)$ в $GL(2,A)$, $2\in A^*$, 3 попарно орт. идемпотента

$\Rightarrow A=M(l,R)$, $\bar{\ }$ = transpose $\Rightarrow Sp, SO$

Проблема 21 Описать подгруппы
в $GL(27,R)$, нормализуемые $E(E_6,R)$,

Пр. 22 Описать подгруппы
в $GSp(56,R)$, нормализуемые $E(E_7,R)$

Пр. 23 Описать надгруппы
в $GO(248,R)$, норм. $E(E_8,R)$

Пр. 24 —//—
в $GL(56,R)$ норм. $E(E_7,R)$

$E(\Phi, Z) \le H \le G(\Phi, R)$, $Z \subseteq R$ А.В. Степанов

$\to H$ нормализует $E(\Phi, P)$

① $\Phi = A_l$, Z — Дедекиндово, R — поле частных (канд. дисс. (Шмидт, ≈ 1982))

② Φ любая; Z, R — поля, R/Z — алгебраическое расширение (канд. дисс. Нужин, 1983)

Теорема Φ — сист. без кратных связей
R — квазитрансцендентное расширение Z
Тогда ответ нестандартный

$Z \subseteq R$ — квазитранс., если $\exists$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, tail] \arrow[d] & P \arrow[r, tail] \arrow[d] & R \\ K \arrow[r, tail] & K[t] & \end{tikzcd}$$

$\Phi = B_l, C_l$

$[h, h^{sg}] = 1$

$\Phi = F_4, G_2$

$[[h, h^{sg}], h] = 1$

s — маленький полупростой
h — длинный корневой элемент $h_\alpha(-1)$
g — любой

Теорема $\Phi = B_l, C_l$, $2 \in Z^*$ $\to$ описание стандартно $\forall Z \subseteq R$

Если Z — кон. порожд. алгебра (область целостности) над полем или над $\mathbb{Z}$, то

$Z \subseteq R$ — квазиалгебраическое, если

① либо $\dim Z \le 1$ (разм. Крулля), $R \subseteq$ алг. замыкание поля частных

② R — целое расширение Z

Гипотеза? Описание стандартно $\Leftrightarrow$ $Z \subseteq R$ — квазиалгебраическое

$\boxed{\text{Пр. 26}}$ Д-ть стандартное описание подгр.

$E(F_4, Z) \leq \ldots \leq G(F_4, R)$

$\boxed{\text{Пр. 27}}$ Д-ть тождество

$[h, h^{s_g}] = 1$ при $\Phi = F_4$

$\boxed{\text{Пр. 28}}$ Д-ть ст. описание при

$\Phi = B_l, C_l, F_4;\ 2 = 0.$

$\boxed{\text{Пр. 29}}$ Верно ли ст. описание если $2 \notin Z^*, 2 \neq 0$?

$C_4 + C_7$

СНОВА
Н.А. ВАВИЛОВ

$\boxed{\text{Пр. 30}}$ $n_1, \ldots, n_s \geq 3$

$E(n_1, R) \otimes \ldots \otimes E(n_s, R) \leq \ldots \leq GL(n_1 \ldots n_s, R)$

– не сделано для поля!

У Ли Шанчжы $s = 2$

$SL(m, k) \otimes SL(n, k) \leq H \leq GL(mn, k)$

$m, n \geq 3$

либо H ~~все~~ нормализует левую часть

либо H содержит $SL(mn, k)$

$\boxed{\text{Пр. 31}}$ $E(m, R) \otimes E(n, R) \leq H \leq GL(mn, R)$

$2, m, n \in R^*$

$m \neq n$ ⇝ доказывать проще

$\boxed{\text{Пр. 32}}$

$EO(m, R) \otimes EO(n, R) \leq \ldots \leq GL(mn, R)$

$EO(m, R) \otimes Ep(n, R) \leq \ldots$

$Ep(m, R) \otimes Ep(n, R) \leq \ldots$

для поля – у Ли Шанчжы

см. также Kleidman, Liebeck

~~Пр.~~ Ring extension subgroups

$S/R, \quad S = R^m$

$\boxed{\text{Пр. 33}}$ $E(n, S) \leq H \leq GL(mn, R)$

$n \geq 3$

$\boxed{\text{Т. Ли Шанчжы}}$ $S/P/R$

$\boxed{\text{Пр. 34}}$ $EO(n, S) \leq H \leq GL(mn, R)$

$Ep(2n, S) \leq H \leq GL(2mn, R)$

$e_3^{\bullet} = e_5$!

$GL(mn, R) = GL(n, M(m, R))$

$\int$ — простые группы в неприводимых вложениях

$\boxed{\text{Пр. 35}}$ $E(C_4, R) \leq \ldots \leq G(E_6, R)$, $2 \in R^*$

$SL(2, p) \hookrightarrow GL(n, p)$ — см. канд. дисс. Ира Суприщенко

$\boxed{\text{Пр. 36}}$ Описать

$\varphi(E(A_2, R)) \leq \ldots \leq G(E_6, R)$

неприводимое вложение

$\leq G(E_7, R)$, $6 \in R^*$

$\boxed{\text{Пр. 37}}$ $\varphi(E(G_2, R)) \leq \ldots \leq G(E_6, R)$, $7 \in R^*$

$$\left.\begin{array}{l} E(G_2 + A_2, R) \leq \ldots \leq G(E_6, R) \\ E(G_2 + C_3, R) \leq \ldots \leq G(E_7, R) \\ E(G_2 + F_4, R) \leq \ldots \leq G(E_8, R) \end{array}\right)$$ см. Liebeck, Seitz

$\boxed{\text{Пр. 38}}$ $\Lambda^m(E(n, R)) \leq \ldots \leq GL(\binom{n}{m}, R)$

$n \geq 3$

Для $m = 2$ — см. Cooperstein

$\boxed{\text{Пр. 40}}$ $S^m(E(n, R)) \leq \ldots \leq GL(\binom{n+m-1}{m}, R)$

$\boxed{\text{Пр. 41}}$ Linear preserver problems

$ad_{GL}(E(n, R)) \leq \ldots \leq GL(n^2, R)$

$$\begin{array}{ccc} E(n, R) & \hookrightarrow & GL(n^2, R) \\ g & \longmapsto & g \otimes g^{-t} \end{array}$$

$\boxed{\text{Пр. 42}}$ $ad_{GL_n}(EO(n, R)) \leq \ldots \leq GL(n^2, R)$.

$Ep(n, R)$

$EU(n, R)$

описание

$F \le H \le N_G(F)$

$\rightsquigarrow N_G(F)/F$ – вычислить для дедекин. колец арифметич. типа

$\boxed{\text{Пр. 49}}$ $E(m,R) \le \dots \le GL(n,R)$, $3 \le m \le n$ (т.е. $m \ne 2$) :)

$\boxed{\text{Пр. 50}}$ Перенести все на достаточно изотропные редуктивные группы

$A, B \le R^{n-m}$