Reductive groups as automorphism groups of algebraic structures: a unified approach

Viktor Petrov, Anastasia Stavrova

Relative root systems and associated algebraic structures

Φ_P	indices	algebraic structure	V_l	V_s	V_{es}
A_r	${}^1A_{n,r}^{(d)}$, $n = rd + 1$	Azumaya algebra A	A	-	-
B_r	$B_{n,r}^{(1)}$ ${}^1D_{n,r}^{(1)}$ ${}^2D_{n,r}^{(1)}$	Quadratic space (V, q)	R	V	-
C_r	${}^1D_{n,r}^{(d)}$, $2 \mid d$, $n = rd$	Azumaya algebra with involution (A, σ)	$\mathrm{Alt}(A, \sigma)$	A	-
C_r	${}^2A_{n,r}^{(d)}$, $n = 2rd - 1$ $C_{n,r}^{(d)}$, $n = rd$	Azumaya algebra with involution (A, σ)	$\mathrm{Sym}(A, \sigma)$	A	-
BC_r	$B_{n,r}^{(d)}$, $2 \mid d$ ${}^1D_{n,r}^{(d)}$, $2 \mid d$ ${}^2D_{n,r}^{(d)}$, $2 \mid d$	Hermitian form H on a module V over an Azumaya algebra with involution (A, σ)	$\mathrm{Alt}(A, \sigma)$	A	V
BC_r	${}^2A_{n,r}^{(d)}$ $C_{n,r}^{(d)}$	Anti-hermitian form H on a module V over an Azumaya algebra with involution (A, σ)	$\mathrm{Sym}(A, \sigma)$	A	V
A_2	$({}^1E_6, \{1, 6\})$	Cayley algebra C	C	-	-
C_3	$(E_7, \{1, 6, 7\})$	Cayley algebra C	R	C	-
BC_2	$(F_4, \{1, 4\})$ $({}^2E_6, \{1, 2, 6\})$ $(E_7, \{1, 6\})$ $(E_8, \{1, 8\})$	Anti-hermitian form H on a module W over a Clifford algebra $\mathrm{Cl}(V, q)$	R	V	W
F_4	$(F_4, \{1, 2, 3, 4\})$ $({}^2E_6, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ $(E_7, \{1, 3, 4, 6\})$ $(E_8, \{1, 6, 7, 8\})$	Composition algebra C	R	C	-
G_2	$(G_2, \{1, 2\})$ $(F_4, \{1, 2\})$ $({}^1E_6, \{2, 4\})$ $(E_7, \{1, 3\})$ $({}^{3,6}D_4, \{1, 2, 3, 4\})$ $({}^2E_6, \{2, 4\})$	Cubic Jordan algebra $(J, N, \#, T)$	R	J	-
D_r, E_r	split	The ring R	R	-	-

11.09.2008

А. Ставрова

Редуктивные группы как группы автоморфизмов алгебраических структур.

G — полупростая алг. группа над R = связное комм. кольцо с 1

$G = G_{ad}$ $\quad P \leq G$ — параб. подгруппа

$P = L \ltimes U_P$

$I \subseteq D$ — диагр. Дынкина $\quad L$ — $D \setminus I$

$\Pi \subseteq \Phi$

<u>Опр.</u> I — **комбинаторный** индекс, если $\forall\, O \subseteq \bar I$ — $*$-орбиты

O инвариантно относительно

$op_{(\bar D \setminus \bar I) \cup O}$

Γ, $*$ — действие на D

определение — см. статьи автора

$\bar D$ — расшифр. диаграмма Дынкина

$\bar I = I \cup (\bar D \setminus D)$

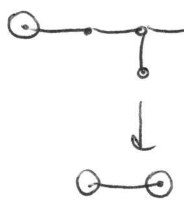
$op_D : D \longrightarrow D$

opposition involution

это условие гарантирует (в частности), что Φ_P — система относительных корней — является системой корней

$$\mathbb{Z}\Phi \longrightarrow \mathbb{Z}\Phi \Big/ \left\langle \begin{array}{l} \alpha_i,\ i \in D \setminus I \\ \alpha_j - \sigma^* \alpha_j,\ \sigma \in \Gamma,\ j \in D \end{array} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

$\Gamma = \{1\}$



$\Phi_P = A_2$

$\Gamma \neq \{1\} \quad \Phi_P = BC_1$

A. Steinbach „Some twisted variants of Chevalley groups"

$A \in \Phi_P$

$X_A : V_A \longrightarrow G$ — „обобщенные" корневые подгруппы

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $\mathbb{Z}A \cap \Phi_P = \{-2A, -A, A, 2A\}$, $2 \in R^*$

$\Rightarrow$ можно выбрать X_A так, что $\forall h \in L \quad h X_A(V_A) h^{-1} = X_A(V_A)$

$$\left(\begin{array}{l} X_A(u) X_A(v) = X_A(u+v) \prod_{i \geq 2} X_{iA}(q_A^i(u,v)), \text{ в частности} \\ X_A(u) X_A(v) = X_A(u+v) X_{2A}(q(u,v)) \\ h X_A(u) h^{-1} = X_A(h \circ u) \prod X_{iA}(\varphi^i(u)) \end{array} \right)$$

□ $\tilde{X}_A(u) = X_A(u)\, X_{2A}\left(\tfrac{1}{2} q(u,u)\right)$

N_{ABij} тоже L-инварианты

$h[X_A(u), X_B(v)]h^{-1} = [X_A(h\cdot u), X_B(h\cdot v)]$

$\overset{\shortparallel}{h \prod X_{iA+jB}}(N_{ABij}(u,v))h^{-1}$

$N_{ABij} : V_A \times V_B \longrightarrow V_{iA+jB}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $V_A,\ A \in \Phi_P$; $N_{ABij};\ A, B \in \Phi_P$

— структура Шевалле $\mathcal{V}_P$ G отн.-но P

$\boxed{\text{Опр.}}$ Автоморфизм структуры Шевалле $\mathcal{V}_P$ — это набор автоморфизмов $\{\varphi_A\}_{A\in\Phi_P}$; $\varphi_A : V_A \longrightarrow V_B$

автом. модулей

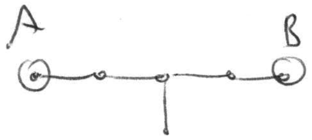
и все φ_A коммутируют с N_{ABij}, т.е.

$N_{ABij}(\varphi_A(u), \varphi_B(v)) = \varphi_{iA+jB}(N_{ABij}(u,v))$

$\boxed{\text{Th.}}$ $L \xrightarrow{\sim} Aut(\mathcal{V}_P)^0$, если $rk\,\Phi_P \geq 2$, I-нелб.-индекс и если $\Phi_P = BC_2, G_2, F_4$, то $2 \in R^*$

$rk\,\Phi_P = 1$

$A_1 : (V_{-A}, V_A)$ — йорданова пара



(1) $= V_A, V_B, V_{A+B}$

$N_{AB11} : V_A \times V_B \longrightarrow V_{A+B}$

$a,\ b \longmapsto \pm ab$

$BC_1 : (V_{-2A}, V_{-A}, V_A, V_{2A})$ JKL-пара

(Винберг, 1976: „Группа Вейля градуированной алгебры Ли")

2003: Benkart, Smirnov

Jordan–Kantor

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$

см. Landsberg, Manivel

$\boxed{\text{Th. 2}}$ (мы примерно понимаем, как доказывать)

В усл Т1: если R — полулокально,
что м. выбрать изоморфизмы $f_{AB} : V_A \xrightarrow{\sim} V_B$ для любых $A, B \in \Phi_\rho, |A|=|B|$
так, что $\forall w \in W(\Phi_\rho)$

$$N_{w(A)w(B)ij} = \pm N_{ABij}$$

„Док-во":

$$\tilde{\Phi}_\rho = \{A \in \Phi_\rho \mid 2A \notin \Phi_\rho\} \text{ — система корней}$$

$\forall C \in \tilde{\Phi}_\rho$ — „простого" (соотв. простым из Φ_ρ)
есть обр-ый эл-т

$$(e_c, e_{-c}) \in (V_{-c}, V_c)$$

$$w_C = X_A(e_c) X_{-A}(e_{-c}) X_A(e_c)$$

аналог w_α

склеиваем V_A с их помощью