18.09.2008
Н.А.В.

Линейные группы над общими кольцами

Результаты и доказательства — для $GL(n,R)$
Вопросы — для $G(\Phi,R)$ и $GU(n,R,\underset{(\Lambda)}{\mathcal{L}})$

Что такое трансвекция?

$t_{ij}(\xi)$

$g t_{ij}(\xi) g^{-1} = e + g_{*i}\xi g'_{j*}$
$i\neq j$

Над полем $\forall$ унимодулярный столбец и ортогон. к нему дополняются до матрицы и обр. матрицы

$\det(x)=1$

$\mathrm{res}(x) = \mathrm{rk}(x-e)=1$

$E(n,R)=\langle t_{ij}(\xi)\mid \xi\in R, 1\le i\neq j\le k\rangle$

$x = e+uv,\quad u\in R^n,\ v\in {}^nR,\ vu=0$

подгруппа Эйхлера

$T(n,R) = \langle e+uv \mid \ldots\rangle \trianglelefteq GL(n,R)$;

Лемма Уайтхеда–Васерштейна:

// $g(e+uv)g^{-1} = e+(gu)(vg^{-1})$

$T(n,R)\le E(n+1,R)$

$g \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Вопрос 1 Когда $T(n,R)=E(n,R)$?

$\mathrm{Umd}(n,R)$ (destra) — унимод. столбцы высоты n

$\mathrm{Ums}(n,R)$ (sinistra) — унимод. строки длины n

В докладе Суслина доказывается, что

$e+uv\in E(n,R)$, если $u\in \mathrm{Umd}(n,R)$ (R-комм., $n\ge 3$)

$E'(n,R) = \langle e+uv \mid u\in \mathrm{Umd}(n,R),\ v\in {}^nR,\ vu=0\rangle$

т.е. $E'(n,R) = E(n,R)$

Суслин — Копейко:

$E''(n,R) = \langle e+uv,\ u\in R^n,\ v\in {}^nR,\ vu=0,\ \begin{pmatrix} u\\ v^t\end{pmatrix}\in \mathrm{Umd}(n,R)$

$\quad = E(n,R)$

Вопрос 2 Привести контрпримеры к равенствам

$E'(n,R)=E(n,R),\ E''(n,R)=E'(n,R), \ldots$

+ Море вариаций

Вопрос 3 При каких условиях какие-то из этих групп совпадают?

$x_{u_1 v} x_{u_2 v} = x_{u_1+u_2, v}$

Вопрос 4 Привести контрпример к тому, что

$$GE(n,R) \trianglelefteq GL(n,R) \quad // R \text{ коммутативно}, \; n \geq 3$$

— либо доказать, что она нормальна

Вопрос 5 Найти теоретико-кольцевую характеризацию колец, для которых $E(n,R) \trianglelefteq GL(n,R)$ при $n \geq 3$

т. Голубчика-Михалева: $E(n,R) \trianglelefteq\trianglelefteq GL(n,R)$

т. Голубчика: станд. описание норм. делителей: $\forall H \leq GL(n,R)$, нормализуемой $E(n,R)$ $\exists! \, I \trianglelefteq R: E(n,R,I) \leq H \leq C(n,R,I)$

т. Петечука: $E(n,R) \trianglelefteq GL(n,R)$ — следует из этих двух.

Вопрос 6. Доказать нормальность $E(n,R)$ в $GL(n,R)$ хотя бы для PI-колец

Вопрос 7. Доказать все, что утверждает Бак

Вопрос 8. Найти точный класс колец, для кот. имеет место станд. описание

Вопрос 9. Опровергнуть станд. описание норм. подгрупп в $E(n,R)$.

Пример Герасимова

$$R = K\langle x, y\rangle / (xy = e = yx), \quad x = (x_{ij}), \; y = (y_{ij}), \; 1 \leq i,j \leq n$$

Для такого кольца $GL(n,R) = GE(n,R) *_{R^*} \langle x R^* \rangle$

$$K = \mathbb{F}_2 \rightarrow GL(n,R) = E(n,R) * \langle x \rangle$$

$\sim \exists$ безразмерные кольца — т.е. не удовл. IBN

$R^n \cong R^m$, $m \neq n$

Если $R^n \cong R^{n,\ell}$, то (n,ℓ)-тип

$\exists (1,1)$-кольца, т.е. $R \cong R^2 \cong R^3 \cong \ldots$

из таких колец не бывает гомоморфизмов в IBN-кольца

$GL(2,R) \cong GL(3,R) \cong \ldots$

Вопрос 10. Сохраняется ли при этих изоморфизмах $E(n,R)$?

Вопрос 11. Можно ли их использовать для построения контрпримеров?

Costa-Keller

В $GL(2,R)$ нормальных подгрупп больше, чем в $GL(n,R)$

$$\begin{array}{c} GL(2,R) \\ \| \\ GSp(2,R) \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

R – коммутативно

Теперь $n=3$; x, y – некоммутирующие переменные

(СУПЕР)

<u>Вопрос 12</u> Дать неомм. обобщение теории Косты-Келлера