16.10.2008
Е.А. Бунина

Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с $1/2$

$l \geq 2$

φ = кольцевой $\circ$ сопряжение („стандартен")

$$E_{ad}(\Phi, R) \subset GL_n(R)$$

$g \in N_{GL_n(R)}(E)$ при помощи g

$G \equiv G'$ — элементарная эквивалентность
если их теории первого порядка совпадают

1961 Мальцев:
$G_n(K) \equiv G_m(L)$
$\iff n=m$ и $K \equiv L$
$G = GL, SL, PGL, PSL$
K, L — алг. замкн. поля

для кон. групп элем. экв. $\Rightarrow$ изоморфность

$$\bigoplus_{\omega} \mathbb{Z}_2 \equiv \bigoplus_{2^\omega} \mathbb{Z}_2$$

70-е годы т. Кейслера–Шелаха

$$G \equiv G'$$
$$\Updownarrow$$
$\exists D$ — ультрафильтр: $\prod_D G \cong \prod_D G'$, $\prod_D G \equiv G$, $\prod_D G' \equiv G'$

$$GL_m(R) \equiv GL_n(R')$$
$$\Updownarrow$$
$$\prod_D GL_m(R) \cong \prod_D GL_n(R')$$
$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$
$$GL_m\left(\prod_D R\right) \simeq GL_n\left(\prod_D R'\right)$$
$$\Downarrow$$
$$n=m,\ \prod_D R \cong \prod_D R', \quad \prod_D R \equiv R,\ \prod_D R' \equiv R'$$
$$\Rightarrow R \equiv R'$$

$A_l,\ l\geq 2$ $\quad\Phi\quad$ $2m$ корней: $\alpha_1, \alpha_{-1}, \alpha_2, \alpha_{-2}, \ldots$

$D_l,\ l\geq 4$ $\quad n = 2m+l$ — dim присоед. представлен

$E_l,\ l=6,7,8$ $\quad\Delta$ — простые корни

(1) $\varphi \in \mathrm{Aut}(E_{ad}(\Phi, R))$

$J \trianglelefteq R$ — радикал кольца R

$E_J = E_{ad}(\Phi, R, J)$ $\quad x_\alpha(t),\ t\in J$ как норм. подгруппа в E

$\rightsquigarrow E_J$ — наибольшая нормальная собств. подгруппа

— инвариантна отн-но действия φ

$\rightarrow$ есть $\overline{\varphi}: E_{ad}(\Phi, \underset{\overset{\shortparallel}{k}}{R/J}) \longrightarrow E_{ad}(\Phi, k)$

почему он стандартен?

ссылки нет

(у Стейнберга поле совершенно)

(у Хамфри — конечно)

сопряжение чего-то из нормализатора

$\rightarrow \overline{\varphi} = i_{\overline{g}} \circ \overline{\rho}$ $\qquad \overline{g} \in N(E_{ad}(\Phi, k))$

g — какой-то прообраз $\overline{g}$

$\varphi' = i_{g^{-1}}\varphi$ — известно, что при редукции по J получаем полевой автоморфизм

это уже не автоморфизм E

$\forall A \in E_{ad}(\Phi, R)$

все эл-ты A лежат в $R' \subset R$

подкольцо, порожденное 1

$\varphi'(A) \in A\cdot GL_n(R, J) = \{B\in GL_n(R) \mid A-B\in M_n(J)\}$

$a\in E$

$a^2=1$ $\qquad e = \frac{1}{2}(1+a)$ — идемпотент в $M_n(R)$

$V = eV \oplus (1-e)V = V_0 \oplus V_1$ — модуль представления — фактически алгебра Ли

свободны, потому что кольцо локально.

$\overline{V}$ — редукция над k

$a \mapsto \overline{a}$ $\rightarrow$ имеем $\overline{V} = \overline{V_0} \oplus \overline{V_1}$

образы при факторизации по радикалу

~~$a, b \in$~~ $a\in E,\ b\equiv a \bmod J$

a — с элементами из R'

$a^2=b^2=1$ $\qquad V_0^a \oplus V_1^a$ $\rightsquigarrow \dim V_0^a = \dim V_0^b$ — ну, ранги.

$V_0^b \oplus V_1^b$

② Образы элементов $w_\alpha(1)$ $\left(\overset{\shortparallel}{w_\alpha}\right)$

$h_{\alpha_1}(-1), \dots h_{\alpha_\ell}(-1)$ $\qquad$ $\underbrace{\underset{\overset{\shortparallel}{V_1}}{V_{\alpha_1}} \; \underset{\overset{\shortparallel}{V_{-1}}}{V_{-\alpha_1}}, \dots V_{\alpha_m} V_{-\alpha_m}}, \underbrace{V_1, \dots, V_\ell}$

$\varphi'(h_{\alpha_i}(-1))$ — тоже набор из ℓ диаг. матриц, коммут. между собой

⤳ можно заменить базис и считать, что $\varphi''(h_{\alpha_i}(-1)) = h_{\alpha_i}(-1)$

w_{α_1} комм. с $h_{\alpha_1}(-1), h_{\alpha_3}(-1), \dots$

$w_{\alpha_1} h_2 = h_1 h_2 w_{\alpha_2}$. Посмотрим отдельно на первый кусок базиса

$e_1 = e$ — первый вектор базиса

$$\alpha_i = w^{(\alpha_i)}(\alpha_1)$$

$e_i := \varphi''(w^{(\alpha_i)})e$ — матрицы перехода базиса должны быть сравнимы с 1 по mod $\mathfrak{J}$

↘ с этим куском всё хорошо

второй кусок сложнее

пусть $\sim$ — ограничение на второй кусок

$\underset{\varphi''(w_{\alpha_i})}{\overset{\shortparallel}{w_i}}$ $\qquad$ $\widetilde{w_i}$

$\varphi''(w_{\alpha_i})$ — инволюции!

в каком-то базисе у них вид $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ Матрицы $\widetilde{w_i}$ и $\widetilde{w_j}$ коммутируют $\Leftrightarrow$ $\widetilde{V}_1^i \subseteq \widetilde{V}_0^j$ и $\widetilde{V}_1^j \subseteq \widetilde{V}_0^i$
для $i \neq j$

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ $\forall \Phi$ $\exists$ базис в $\widetilde{V}$ т.ч. $\widetilde{W}_1$ имеет в нем вид w_{α_1}:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E_{\ell-2} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Лемма 3}}$ Для $\Phi = A_2$ $\exists$ базис т.ч.

$\widetilde{W}_1$ имеет вид w_{α_1} $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

и $\widetilde{W}_2$ —//— w_{α_2} $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Лемма 4}}$ $\forall$ $\Phi \neq A_2$ $\exists$ базис т.ч.

и $\widetilde{W}_1$, $\widetilde{W}_2$ имеют нужный вид.

– либо $\dim \widetilde{V}_0^1 \cap \widetilde{V}_0^2$ имеет ранг $\geqslant l-3$

$\boxed{1 \cdots}$

$\widetilde{w}_2^{\,2} = 1, \quad (\widehat{w}_1 \widehat{w}_2)^2 = \widehat{w}_2 \widehat{w}_1$

из уравнений все получается,

$\boxed{\text{Лемма 5}}$ $\Phi = D_4 \Rightarrow$ все хорошо.

$\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_4$ – и на $\widetilde{w}_2$ куча уравнений

$\boxed{\text{Лемма 6}}$ Φ – любая

$\widetilde{w}_{i_1} = w_{\alpha i_1}$ – уже имеют нужный вид
$\vdots$
$\widetilde{w}_{i_k} = w_{\alpha i_k}$

Итог

$\rightsquigarrow$ есть φ_2: $\varphi_2(w_\alpha) = w_\alpha$

(3) Образы элементов $x_{\alpha_i}(1)$ и $h_{\alpha_i}(t)$, $t \in R^*$

Пусть

$\varphi_2(x_{\alpha_1}(1)) = x_1$ // дост. рассмотреть один, остальные – группой Вейля, а её мы уже вернули!

комм. с $h_1(-1), h_3(-1), \ldots, h_l(-1)$

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha_i & \alpha_{-i} \\ \hline \alpha_i & a & b \\ \alpha_{-i} & c & d \end{array} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod J \quad \text{и} \quad h_2(-1) x_1 h_2(-1) = x_1^{-1}$$

$\langle \alpha_1, \alpha_i \rangle = 0$

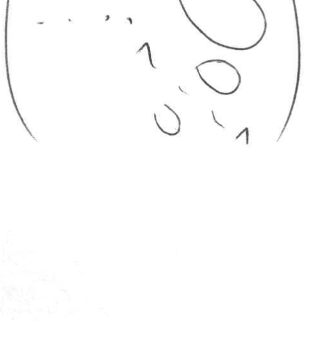
$$a^2 + bc = d^2 + bc = 1$$

$$b(a+d) = c(a+d) = 0$$

4×4 $\quad \alpha_i, -\alpha_i, \alpha_j, -\alpha_j$

$\alpha_j = \alpha_1 + \alpha_i, \quad \langle \alpha_1, \alpha_i \rangle = 1$

x_1 комм. w_3, w_4



$X_{\alpha_1}(1) = \begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$

α_1
$-\alpha_1$
α_2
$-\alpha_2$
$\alpha_1+\alpha_2$
$-\alpha_1-\alpha_2$
h_1
h_2

$X_{\alpha_2}(1) = (\ldots)$

$X_{\alpha_1+\alpha_2}(1) = (\ldots)$

$X_1 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ \ldots & & \end{pmatrix}$ ← можно так сопрячь

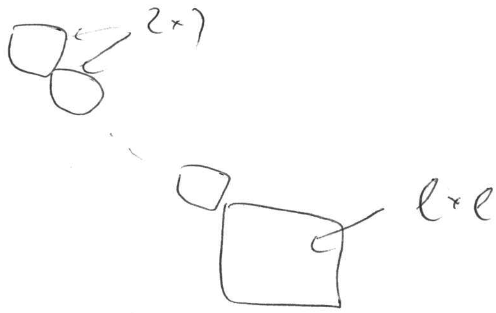
$X_{1+2} = \varphi_2(X_{\alpha_1+\alpha_2}(1))$

$\to X_1 = X_{\alpha_1}(1)$

Теперь ставим на место h_i:

$d_t = \varphi_2(h_{\alpha_1}(t))$ ~~[illegible]~~

d_t коммутирует со всеми h_i $\to$



d_t ком с w_i, $i \geq 3$ ~ соотношения

$x_2^t x_2 = x_2 x_2^t$

$d_t w_1 d_t w_1^{-1} = 1$

$w_2 d_t w_2^{-1} = d_t w_1 w_2 d_t w_2^{-1} w_1^{-1}$

$\to d_t = h_{\alpha_1}(s)$

(4) Доказательство теоремы

$x_{\alpha_1}(t) \longmapsto x_{\alpha_1}(s)$

$\uparrow R^*$

$g : t \longmapsto s$ $\to$ $x_{\alpha_1}(1+t) \longmapsto x_{\alpha_1}(1+s)$

$g(1+t) := 1 + g(t)$ — инъективно, аддитивно, мультипликат

почему оно сюръективно?

Пусть $g: R \longrightarrow R' \subset R$

$$\varphi_g(E_{ad}(\Phi, R)) = E_{ad}(\Phi, R')$$

$$\longrightarrow C M_n(R) C^{-1} = M_n(R')$$

общая матрица перехода

Что делать, если не требовать $\frac{1}{2} \in R^\times$?

$w, x, (1)$ — чудесные элементы порядка 3,

но их не очень много коммутирующих

$Q_i = w_i x_i(1)$

Берем

$Q_1, Q_3, \dots, Q_e$