23.10.2008

С. Синчук

А. Панин „Промежуточные подполугруппы — группы"

<u>Теорема</u> R — артиново кольцо

$\forall$ H — полугруппы: $H \leq GL_n R$

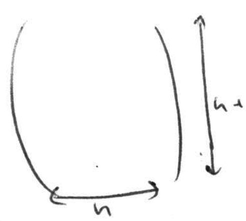
$H \geq D_n R \Rightarrow H$ — группа

<u>Предложение</u> $\langle a, D\rangle$ — полугруппа, натянутая на a и D

$\forall a \in GL_n R \quad e \in \langle a, D\rangle$

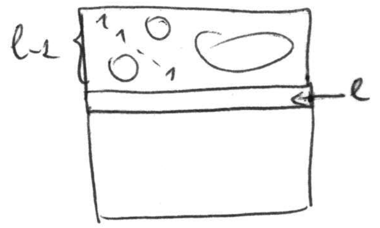
<u>Теорема</u> Утв-е верно для тел

1. T — бесконечно
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j b_{ij} \neq 0 \quad i \in \overline{1.N}$ и $\forall i\, \exists j(i)$: $a_{ij} b_{ij} \neq 0$

   → эта система имеет решение
3.  Если выкинуть любую → получается обратимая

   $\exists$ решение, в котором все $\neq 0$
4. $a_{ij} \neq 0 \iff m_{ji}$ — обратим
5. $\exists \tilde{a} \in \langle a, D\rangle$ все $\tilde{a}_{ii} \neq 0$

$\square$ (Теоремы) индукция: 

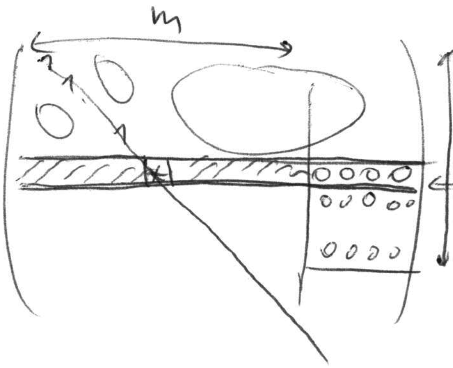
① $a_{ij} = 0$ — хороший, если $\forall r \; a_{ir} a_{rj} = 0$

можно от a перейти к матрице, у которой ряд l хороший

Пусть a_{lj} — max → $\exists r(j)$: $a_{lr} a_{rj} \neq 0$ → применим (2)

→ берем d такую, что ada обл. нужным св-вом

м. считать, что $a_{li} \neq 0$ → $a_{ii} d_i a_{ii} \neq 0$



(2) Можно добиться:

$a_{lj} \neq 0 \Rightarrow a'_{lj} \neq 0$

$a_{lj} = 0 \Rightarrow a'_{lj} = 0$

$M_n(R/\mathfrak{d}) \longrightarrow G(\sigma) = M(\sigma) \cap GL\,R$

$a(jl)$ обратима $\forall j \leq m$

$$\sum_{r=1}^{m} d_r a_{rj} = 0$$
$j \in \overline{1..m}$ $\quad j \neq l$

$$d_r = \begin{cases} a_{lr}^{-1} d_r, & \text{если } 1 \leq r \leq m \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$\rightarrow$ у ada первые l строк хорошие

$$(ada)_{lj} = \sum a_{lr} d_r a_{rj} = \sum_{r=1}^{m} a_{lr} a_{lr}^{-1} d_r a_{rj} = 0$$
$j \neq l$

---

(1) $M_n T$ $\qquad GL_n M_m T = GL_{nm} T$

$\qquad D_n M_m T \supseteq D_{nm} T$

(2) $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i$ $\quad R_i$ — полупросто $\quad$ — очевидно (покомпонентно)

(3) R — артиново.

а) Инд. по l $\quad$ 1 у a первых $l-1$ строка ~~хорош~~ хорошие

б) Инд. по k: $\quad a_{lj} \in \mathcal{J}^k$ $\quad j \neq l$ $\qquad$ имеет большую степень

$$(ada)_{lj} = \sum_r a_{lr} d_r a_{rj} = \overbrace{a_{ll}}^{\times 0} d_l a_{lj} + a_{lj} d_j \overbrace{a_{jj}}^{\times 0} + \left(\ldots\right)$$

$$d_l = a_{ll}^{-1} \quad d_j = -a_{jj}^{-1}$$

---

(1) Верно ли $\forall$ комм. кольца?

(2) Верно ли, что $\forall$ норм. подполугруппа — группа?

(3) Верно ли для подгрупп элем. клеточно-диаг. над $\forall$ кольцом?

после (2)