$\boxed{6.11.2008}$

М.А. Всемирнов

Общая постановка (неправильная)

$\langle x_1, \dots, x_n \mid R_1, \dots, R_k \rangle$ – группа, заданная образующими и соотношениями

① $|G| < \infty$?

② Если $|G| = \infty$, какие факторы?

③ $G_1 = G/H$ – можно ли дополнить соотношения, чтобы получить представление G_1?

Самый простой случай — образующие порядка 2 и 3

$$G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = 1 \rangle \cong PSL(2, \mathbb{Z})$$

$PSL(n, \mathbb{Z})$ – любая нормальная содержит конгруэнц-подгруппу при $n \geq 3$

Факторы $PSL(2, \mathbb{Z})$ — $(2,3)$-порожденные группы

$\boxed{\text{Зад.}①}$ — R — к.пор. коммутативное кольцо

Какие элементарные группы Шевалле над R $(2,3)$-порождены?

$$R = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_m]$$

Известно:

$SL(n, R)$

Если $n \geq A + Bm$, то ответ: да (C. Tamburini)

Вопрос: нужно ли предположение, что одна из образ. — кон. мульт. порядка?

$SL(n,q)$, $Sp(2n,q)$, $SU(n,q)$, $\Omega(n,q)$

– $(2,3)$-порождены для всех достаточно больших n.

$PSp(4,2^k)$, $PSp(4,3^k)$ – не $(2,3)$-порождены

$\boxed{\text{Зад.}②}$ Разобраться в работах Либека–Шалева и получить эффективные оценки

$\mathbb{Z}$:

$SL(n, \mathbb{Z})$ $(2,3)$-порождена $\iff n \geq 5$

$\boxed{\text{Задача}}$ Полностью классифицировать пары $(2,3)$-образующих для $SL(6, \mathbb{Z})$.

$Sp(n, \mathbb{Z})$

$n = 2$ нет

$n = 4$ нет, ибо $Sp(4,2)$, $Sp(4,3)$ не $(2,3)$-порождены (Либек–Шалев)

$n = 6$ нет

$n = 8$ да

$\boxed{\text{Задача}}$ Разобраться с $Sp(n, \mathbb{Z})$

$PSp(6,\mathbb{Z})$

– локальные условия оставляют ∞ кол-во наборов

$(2,3,7)$ $(2,3,k)$ m, l, k

$G = \langle X, Y \mid X^m = Y^l = (XY)^k = 1\rangle$

$\frac{1}{m}+\frac{1}{l}+\frac{1}{k} > 1 \rightsquigarrow$ конечна

$< 1 \rightsquigarrow$ бесконечна

$= 1 \rightsquigarrow$ бесконечна, но содержит абелеву группу кон. индекса

$\boxed{\text{Т-ма Гурвица}}$ R – компл. рим. пов-сть рода g

$\rightsquigarrow$ группа $Aut(R)$ бесконечна при $g=1$

конечна при $g \geq 2$ и $|Aut(R)| \leq 84(g-1)$

и равенство – в точности для $(2,3,7)$-порожденных

Известно

$SL_n(q)$, $SL_n(\mathbb{Z})$ $(2,3,7)$-порожд. при $n \geq 252$

$n = 49, \dots$

A_n – да, при $n \geq 168$

Отр. результаты:

A_{167} (известны все исключения для A_n)

$SL_n(\mathbb{Z})$ не $(2,3,7)$-порожд. при $n \leq 19$, $n = 22, 23$

$SL_n(q)$ не $(2,3,7)$-порожд. при $n \leq 11$ (кроме $SL_3(2)$)

$n = 12, 13, \dots, 19, 22, \dots, 38 \to \exists$ беск. много q, при кот. группа не $(2,3,7)$-порождена.

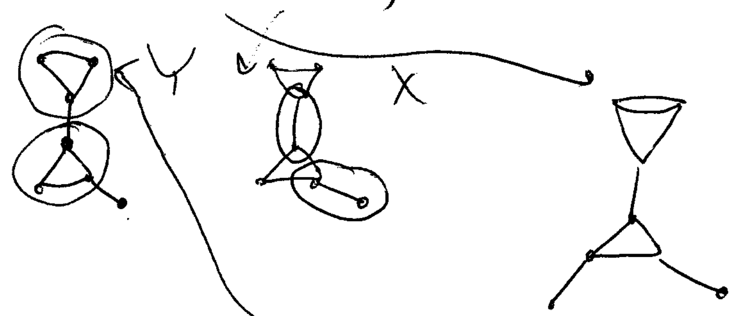
Гипотеза $q \equiv 1\ (14)$ $SL_{12}(q)$ – $(2,3,7)$-порождена

Метод Хигмана – Кондера

– соединяем линией точки в одной орбите отн-но X

— // — треугольники — // — // — // — Y

$PSL_2(7) = SL_3(2)$



<u>i-ручка</u>

(a_1, a_2)

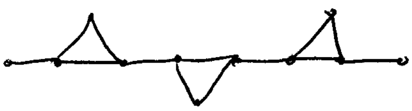
$Xa_1 = a_1$

$Xa_2 = a_2$

$(Y^t X)^i a_1 = a_2$

1-ручка

2-ручка 

3-ручка 

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_1' \\ a_2' \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

← Хигман – Кондер

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

← Тамбурини – Уилсон – для 1-ручек

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & & t & \\ & -1 & & t \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ – линейная ручка (Т.-Л.-W.)

$Xa_1 = a_1$ $\qquad$ Y переставляет a_1, a_2, a_3

$Xa_2 = a_2$ $\qquad$ $\langle a_4, \ldots, a_n \rangle$ – Y-инвариантно.

Соединяем: 1 ручка и b_1, b_2 – V элементы, такие, что $b_1, b_2 \in \langle a_3, \ldots, a_n \rangle$

$Xb_1 = b_1$; $Xb_2 = b_2$; $Yb_1 = b_2$

дополнение – X-инвариантно

$\langle a_3, \ldots, a_n \rangle$

$a_1, \ldots \ a_n$ – Кон ручка (Vsemirnov)

$Xa_1 = a_1$, $Xa_2 = a_2$, $\langle a_3, \ldots, a_n \rangle$ – X-инв

$Ya_1 = a_2$ $\quad Y(\langle a_2, \ldots, a_n \rangle) \subseteq \langle a_1, a_3, \ldots, a_n \rangle$