27.11.2008

Double coset density in classical algebraic groups

// Brundan

G — редуктивная связная алг. группа над а.з. полем

$H, K \leq G$; H, K — замкнутые

$H \times K \curvearrowright G$ hgk^{-1} $\rightsquigarrow$ двойные смежные классы

(D1) $HK = G$ — факторизация, см. Liebeck, Seitz, Saxl

$\Downarrow$ (D2) Когда конечное число орбит? BwB

$\Downarrow$ (D3) Когда $\exists$ плотная орбита

H — полупростая $\curvearrowright V$ K — стабилизатор i-мерного подпространства

$G = GL(V)$ $\rightsquigarrow$ дв. см. классы ~~орбиты~~ = орбиты i-мерных подпр-в под действием H.

$M(G) = \{H$ — макс. редуктивная связная : H — макс. связная, H — фактор Леви макс. параболической$\}$

$R(G) = \{H : \exists H^0 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq G : H_i \in M(H_{i+1})\}$

Когда char = 0, это все редуктивные группы

$\boxed{\text{Th. A}}$ Если G — связная редуктивная; $H, K \in R(G) \Rightarrow$

$\Rightarrow G = H \cdot K$ или нет плотной орбиты

Luna: char = 0 $\Rightarrow \cup$ всех замкнутых орбит плотно

$\boxed{\text{Th. B}}$ G — простая класс. группа; $H, K \in M(G) \Rightarrow HK = G$ или нет плотной орбиты

исм. — тоже Brundan

$\boxed{\text{Lm.}}$ $H, K \leq G$

1) верно $H, K \Leftrightarrow H^0, K^0$

2) $H, K \Leftrightarrow H^g, K^l$ $g, l \in G$

3) $\Theta : \tilde{G} \to G$ — сюрьект. морфизм алг. групп

$\tilde{H} = \Theta^{-1}(H)$, $\tilde{K} = \Theta^{-1}(K)$

$(\tilde{G}, \tilde{H}, \tilde{K}) \Leftrightarrow (G, H, K)$
верно верно

Гипотеза Мамфорда

G — алг. группа, $G \curvearrowright X$ аффинно, есть неподв. точка : $Gv = v$

$\rightsquigarrow \exists f \in k[X]^G \setminus k : f(v) \neq 0$

// char = 0 — просто, char > 0 — Haboush, 76

$\boxed{\text{Lm}}$ $G \curvearrowright X$,
$\quad$ $\llcorner$ редукт. $\quad$ $\llcorner$ аффинно

A, B — замкнутые, G-инвариантные, $A \cap B = \varnothing$
$\rightsquigarrow \exists f \in k[X]^G : \forall a \in A \; f(a) = 0, \; \forall b \in B \; f(b) = 1$

$\boxed{\text{Lm}}$ T — макс. тор в G, $G \curvearrowright X$, $x \in X : Tx = x$
$\Rightarrow Gx$ — замкнутое подмн-во X.

$\boxed{\text{Lm}}$ $H \leqslant G$, H — редуктивна $\Rightarrow \nexists$ плотной (H, H)-орбиты

$\boxed{\text{Lm}}$ V — G-модуль; $v, v' \in V_0 \Rightarrow$ (v и v' сопряжены $\Leftrightarrow v, v'$ — под действ. W)
$\quad$ V_0 — весовой под действием некоторого макс тора

$\boxed{\text{Th}}$ Seitz $G = Cl(V)$, $H \leqslant G$, H — редуктивная макс. связная подгруппа
$\Rightarrow$ одна из:
① $H = N_i$
② $V = U \otimes W$, $H = Cl(U) \otimes Cl(W)$
③ $(G, H) = (SL, Sp)$, (SL, SO) $p \neq 2$, (Sp, SO) $p = 2$
④ H — простая, $V \curvearrowleft H$ — неприводим, $\otimes$-неразл.

$\dim H + \dim K \geqslant \dim G$ $\rightsquigarrow$ выбираем из списка стабилизаторы невырожденных подпространств
$(G, H, K) = (Cl(V), N_i, N_j)$
$i \neq j \rightsquigarrow 1 \leqslant j < i \leqslant n/2$

$H = N_i$ — стаб. V_H
K — стаб. $V_K \leqslant V_H$

$\rightsquigarrow HK = \mathrm{Tran}_G(V_K, V_H)$
$h \in \mathrm{tran}_G(V_K, V_H^\perp)$
$\rightsquigarrow HhK = \mathrm{Tran}_G(V_K, V_H^\perp)$

$(G, H, K) =$ (char = 2)
$(Sp(V), SO(V), A_n, \omega_1 + \omega_2)$ $n \equiv_4 1$
$(Sp(V), SO(V), C_n, \omega_2)$ $n \equiv_4 2$
$(Sp(V), SO(V), E_7, \omega_1)$

$d := \dim(V)$, $\measuredangle W : \dim W = d + 2$
$w \in W$ $Q(w) = 1$, $\tilde{G} = \mathrm{Stab}\langle w \rangle \cong SO_{d+1}$
$V = w^\perp / w$ $\rightarrow \tilde{G} \longrightarrow G$

$\overline{H} = SO_d$ — стабилизатор $U \leq W$: $U \oplus w = w^{\perp}$

$Z = (W^{\perp})^*$ $\overline{H}$ стабилизирует f_0 : $f_0(w) = 1$, $f_0(U) = 0$

$\overline{G} \curvearrowright Z$

$\overline{K} \curvearrowright Z$, у него $\exists$ 2 замкнутых непересек. орбиты.

$\overline{G} f_0 = \{f : f(w) = 1\}$ (лемма Витта)

Теперь пусть T — макс. тор в $\overline{K}$

$\dim Z_0 = \dim (W^{\perp})_0 + 1 \geq 2$

Теперь про подгруппы Леви:

H — св. ред. подгруппа в G, S — макс. тор в H, лежащий в макс. торе G:

$S \leq T$ $\quad W_H$, $N_H(S) = N_H(T)$

L — фактор Леви

$\to$ существование мотной орбиты $\Rightarrow W = W_L \cdot W_H$

$\boxed{Th}$ G — присоединенная, полупроста, $\mathrm{length}(G) \geq 2$, $H \in M(G)$

$\Rightarrow$ либо $G_1 \lhd G$: $G_1 \leq H$

либо $\mathrm{length}(G) = 2$, H вложена диагонально:

$$\begin{tikzcd} & G = G_1 \times G_2 \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ G_1 & & G_2 \end{tikzcd}$$

$\underline{\pi_i}|_H$ — биекция