18.12.2008

Трансфер в алгебраической и унитарной K-теории

В. Колейко

$f: A \longrightarrow B$ — гомоморфизм колец, $f^*: K_n(A) \longrightarrow K_n(B)$

$f_*: K_n(B) \longrightarrow K_n(A)$ — трансфер (Verlagerung)

$B \in \mathbb{H}(A)$ $\quad hd_A B < \infty$ $\quad$ У нас будет $n = 1$ $\quad P_i \in \mathbb{P}(A)$

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$f_*([B]) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot [P_k]$$ — трансфер для K_0-функтора

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_n \arrow[r] & Q_{n-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & B' &
\end{tikzcd}$$

теперь $B' = B$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_n & & & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

α — автоморфизм

Не любой автоморфизм α продолжается на проективную резольвенту!

Нужно ее перестраивать: (см. Басс) — трюк Уайтхеда

$$P_0 \oplus P_0 \longrightarrow B \oplus B \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

$$\alpha \oplus \alpha^{-1}$$

Квадрат Милнора:

P — расслоенное произведение

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[d] \\
A_2 \arrow[r] & B
\end{tikzcd}$$

P_1

P_2

$P_2 \otimes B \cong P_1 \otimes B$

— так было в K_0.

Можно перенести это на K_1, получится другая резольвента

Итак, имеется резольвента в $\operatorname{Aut}(\mathbb{P}(A))$:

$$0 \longrightarrow (P_n, \alpha_n) \longrightarrow (P_{n-1}, \alpha_{n-1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow (P_1, \alpha_1) \longrightarrow (P_0, \alpha_0) \longrightarrow (B^n, \alpha) \longrightarrow 0$$

Теперь естественно задать трансфер для K_1-функтора формулой

$$f_*\big((B^n, \bar{\alpha})\big) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [(P_k, \alpha_k)]$$

$$K_1(A) = GL(A)/E(A)$$

$$\begin{array}{c} K_1(A) \\ \| \\ K_0(Aut(\mathbb{P}(A))) \end{array} \qquad [(P, \alpha\cdot\beta)] = [(P,\alpha)] + [(P,\beta)]$$

$\boxed{\text{Пример 1}}$ A — дедекиндово кольцо, $\forall I \underset{\neq 0}{\in} \mathbb{P}(A)$

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow A/I \longrightarrow 0$$

$hd_A(A/I) \leqslant 1$ и $\exists\, f_*^B : \underbrace{K_1(A/I)}_{\| \atop \mathcal{U}(A/I)} \longrightarrow K_1(A)$

$K_1(A/I) = \mathcal{U}(A/I)$, т.к. A/I — артиново кольцо

Возьмем $\bar{b} \in \mathcal{U}(A/I)$

$$\Rightarrow f_*^B([\bar{b}]) = \begin{pmatrix} b \\ I \end{pmatrix}$$ — обобщенный символ Меннике

$$F = Q(A)$$

$$K_1(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow K_1(A) \longrightarrow K_1(F)$$

$\mathfrak{p} \neq 0$

$\mathfrak{p}$ — прост

Отображение $K_1(A/\mathfrak{p}) \longrightarrow K_1(A)$

$$\bar{b} \longmapsto \begin{pmatrix} b \\ I \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Пример 2}}$ s — центральный элемент кольца

$\bar{\alpha} \in GL_n(A/s)$ $\qquad$ α, β — подъемы $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}^{-1}$

$\leadsto \alpha\cdot\beta = 1_n + s\cdot\gamma$ $\qquad$ $\Gamma(\bar{\alpha}) := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ s\cdot 1_n & \beta \end{pmatrix}$ — обратима;

$\left(\begin{pmatrix} \beta & -\delta \\ -s\cdot 1_n & \alpha \end{pmatrix}, \text{ где } \beta\cdot\alpha = 1 + s\delta \right)$ $\cdot\, \Gamma(\bar{\alpha}) = \begin{pmatrix} 1_n & * \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$

Если кольцо коммутативно, то $\det \Gamma(\bar{\alpha}) = 1$

(лемма Суслина)

$\boxed{\text{Теорема}}$ сравнения

s — централен, не делитель $0 \Rightarrow f_*^B([\bar{\alpha}]) = [\Gamma(\bar{\alpha})]^{-1}$

$$f_* : K_1(A/s) \longrightarrow K_1(A)$$ — здесь даже не нужно условие, что s — не делитель 0
$$[\bar\alpha] \longmapsto [\Gamma(\bar\alpha)]$$

<u>Св-ва:</u> ① $\bar\alpha$: $\alpha \in GL(A)$
$$\Rightarrow f_*([\bar\alpha]) = 1$$

② $\Gamma(\bar\alpha) \underset{E(A)}{\sim} \gamma$, где $\gamma \in GL_{n+1}(A)$

③ Если A — коммутативно, то справедлива <u>формула проекции</u>: $K_1(A)$, $K_1(A/s)$ — $K_0(A)$-модули, и построенное отображение — гомоморфизм K_0-модулей

④ $K_1(H|s(A)) \xrightarrow{f_*^B} K_1(A) \xrightarrow{loc.} K_1(A_s)$

кон. проект. резольвенты, кот. аннулируются s

Если A — регулярно, то $K_1(H|s(A)) = K_1(A/s)$

$\langle A$ — комм. кольцо $\rangle$

$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ — <u>регулярная последовательность</u>, если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \neq A$, a_1 — не делитель 0 в A

a_i — не делитель нуля в $A/\langle a_1, \ldots, a_{i-1}\rangle$ при $i = 2, \ldots, k)$

$K_1(A/I) \xrightarrow{f_*} K_1(A)$ — строится индуктивно

Комплекс Кошуля — конечная резольвента A/I и есть f_*^B

В этом случае $f_*^B = (-1)^k f_*$

<u>Теорема</u> Басса — Хеллера — Суона (1965):

Если A — рег. комм., то $K_1(A[x]) \cong K_1(A)$.

$K_1(A) \longrightarrow K_1(A[x])$ — мономорфизм

Осталось доказать: $\forall \alpha \equiv 1 \pmod x$ есть произведение элементарных

Индукция по $\dim A$: $\dim A = 0$ — поле — доказывать нечего

по т. Квиллена достаточно д-ть для регулярного локального.

Возьмем $s \in \mu \setminus \mu^2 \Rightarrow A/s$ регулярно и $\dim A/s = \dim A - 1$;

A_s — тоже регулярно; $\dim A_s \leq \dim A - 1$

$$\rightsquigarrow K_1(A/_s[x]) \longrightarrow K_1(A[x]) \longrightarrow K_1(A_s[x])$$

$$\alpha \longmapsto \alpha_s \in E(A_s[x])$$

$$\alpha \in \operatorname{Im}\big(\overset{\text{☺}}{K_1}(A/_s[x]) \longrightarrow K_1(A[x])\big)$$

$\rightsquigarrow \alpha$ элементарна ■

Следствие. Если A регулярное кольцо такое, что $SK_1(A) = \{1\}$

$\rightsquigarrow \forall$ матрица из $SL_n(A[X_1, \dots, X_n])$ элементарна при $n \geq \max(3, \dim A + 2)$

Унитарный случай

Если F — поле, то $K_1 Sp(F[X_1, \dots, X_n]) = \langle 1 \rangle$, — канд. дисс.

(на самом деле $r \geq 2$, т.е. начиная с Sp_4)

$$\begin{pmatrix} 1 + X_1 X_2 & X_2^2 \\ -X_1^2 & 1 - X_1 X_2 \end{pmatrix}$$ при $r = 1$ это неверно

Для ортогональной:

$$EO_{2r}(A) \trianglelefteq O_{2r}(A) \quad \text{при } r \geq 3$$

$r=2$ (K, 1983): если $EO_4(A) \trianglelefteq O_4(A)$, то $E_2(A) \trianglelefteq SL_2(A)$

Если 2 обратима, то $K_1^h(A[X]) \cong K_1^h(A)$ (Karoubi)

Как быть с $\mathbb{Z}$?

1991: $\forall$ локально-главных колец (т.е. локализация по $\forall$ простому — ОГИ)

$\rightsquigarrow \forall$ дедекиндова кольца

1992. УМН: $K_1 Sp(A[X_1, \dots, X_n]) \cong K_1 Sp(A)$ $\forall$ дедекиндова кольца

$$K_1(A/_s[x]) \longrightarrow K_1(A[x]) \longrightarrow K_1(A_s[x])$$

A — d.v.r $\rightsquigarrow A(X)$ — специально, т.е. $K_1 Sp(A(X)) = \langle 1 \rangle$

$\cong S^{-1}A[X]$, S мульт. сист. из унитарных мн-нов

(A,Λ,ε), s — центр., не делитель 0, инвар. отн-но инволюции.

$f: A \longrightarrow (A/s)_{1} = A'$, Λ' — образ Λ

$${}_\varepsilon W_n(A',\Lambda',s') \longrightarrow {}_\varepsilon W_{n+1}(A,\Lambda,\varepsilon)$$

$$f_*^h : W_1^\varepsilon(A/s) \longrightarrow W_2^s(A)$$

$$\forall \bar\alpha \in U^\varepsilon_{2r}(A/s) \qquad \alpha^* I_r^s \alpha = I_r^s + s\cdot\beta, \quad I_r^s = \begin{pmatrix}0 & 1_r\\ s1_r & 0\end{pmatrix}$$

$$\Gamma'(\bar\alpha) = \begin{pmatrix} -sI & \alpha\cdot I\\ I\cdot\alpha^* & -I\cdot\beta\cdot I\end{pmatrix} \qquad \alpha=(\alpha_{ij}) \rightsquigarrow \alpha^* := (\alpha_{ji}^*)$$

ε-эрмитова

и получаем отображение

$$W_1^\varepsilon(A/s) \longrightarrow {}_\varepsilon K_0^h(A) \text{ — некорректно}$$

$$\uparrow$$

$$H^0(\mathbb{Z}/2, K_1(A)) \text{ — уже корректно}$$

$$\longrightarrow W_2^\varepsilon(A)$$

(<u>наука Кавказа</u>)

$$f_*^h: {}_\varepsilon W_0'(A/s) \longrightarrow {}_\varepsilon W_1'(A)$$

$$\Gamma''(\bar\alpha) = \begin{pmatrix}\varepsilon\cdot\alpha & \gamma\\ \varepsilon\cdot s\cdot 1_r & \beta\end{pmatrix} \in U^{-\varepsilon}_{2r}(A)$$

$H: K_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon K_n^h(A)$ — гипербол. функтор

коядро — $W_n^\varepsilon(A)$ — гр. Витта

$/*\ \alpha\cdot\beta = 1_r + s\gamma\ */$

$F: {}_\varepsilon K_n^h(A) \longrightarrow K_n(A)$ — забывающий

ядро — ${}_\varepsilon W_n'(A)$ — когруппа Витта

$${}_\varepsilon W_0'(A/s) \longrightarrow \underbrace{K_1}_{\text{заменяем на}} U^{-\varepsilon}(A) \text{ — некорректно}$$

$$H^1(\mathbb{Z}/2, K_1(A)) \longrightarrow {}_\varepsilon W_1'(A)$$

S. Gille (Жиле):

построил ${}_\varepsilon W^n(A/s) \longrightarrow W^{n+1}(A)$

если 2 — обратима и A, A/s — регулярны.