Берик
12.03.2009

Σ — ассоц. кольцо с 1

$X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — алфавит (просто мн-во символов)

$A_{\Sigma X}$ — своб. Σ-операторное асс. кольцо

$\overset{\parallel}{\Sigma\langle X\rangle}$

В кольце $A_{\Sigma X}$ мн-во X порождает подкольцо $A^{(-)}_{\Sigma X}$; $x \circ y = [x,y] = xy - yx$, $+$ и действия на эл-ты из Σ.

Σ - поле; тогда $A^{(-)}_{\Sigma X}$ — алг. Ли, свободна.

Вопрос: при любом ли Σ $A^{(-)}_{\Sigma X}$ будет свободным? — что это значит?

<u>Выбор базиса в $A^{(-)}_{\Sigma X}$</u>

Рассм. $\mathfrak{X}$ — мн-во ассоциативных слов на X

X — упорядочено

$x_\alpha < x_\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

$\underbrace{x_3x_2x_1}, > \underbrace{x_3x_2x_1}, x_2$

$(uv)w = (uw)v + u(vw)$ — тождество Якоби

u — лиевская запись

$\bar{u}$ — ассоциативная запись

Опр. Ассоциативное слово $\bar{u}$ — <u>правильное</u>, если для любого представления $\bar{u} = \bar{u}_1\bar{u}_2$, $\bar{u}_1\ \bar{u}_2$ — непустые асс. слова справедливо $\bar{u} > \overline{u_2}\,\overline{u_1}$

$x_3x_3x_2x_1x_1x_3x_2x_2$ — правильное

Замечание $\bar{u}, \bar{v}$ - правильные, $\bar{u} = \bar{v}\,\bar{v}_1 \rightsquigarrow \bar{v} > \bar{u}$

$\bar{u} > \bar{v}_1$

Опр. Неассоциативное X-слово u называется <u>правильным</u>, если

① Правильно слово $\bar{u}$, полученное из u опусканием скобок

② $u = vw \rightsquigarrow v, w$ — правильные неасс. слова

③ $u = (v_1v_2)w \rightarrow v_2 \leq w$

В

2) $u = vw$

$\to v > w$

$\boxed{\text{Лемма}}$ В каждом правильном асс. слове

$\exists!$ расстановка скобок, превращающая его в прав. неасс. слово

$$x_3 x_3 (x_2 x_1) x_1 x_3 x_2 x_2$$

$$x_3 x_3 ((x_2 x_1) x_1) x_3 x_2 x_2$$

$$x_3 (x_3 ((x_2 x_1) x_1)) ((x_3 x_2) x_2)$$

$$(x_3 \{ (x_3 ((x_2 x_1) x_1)) ((x_3 x_2) x_2) \})$$

$\boxed{\text{Лемма 2}}$ Каждый эл-т $L_{\Sigma X}$ представим в виде лин. комб. прав. слов с коэф. из Σ

$\boxed{\text{Лемма 3}}$ Если прав слово $v \in A^{(-)}_{\Sigma X}$ записать в виде элемента кольца $A_{\Sigma X}$, то в эту запись $\bar{v}$ войдет с коэффициентом 1, а все остальные асс. слова, ~~входящие~~ в эту запись, будут меньше v.

$\boxed{\text{Thm}}$ Кольца $L_{\Sigma X}$ и $A^{(-)}_{\Sigma X}$ изоморфны

$\boxed{\text{Опр.}}$ Асс. слово называется <u>периодическим</u>, если оно представимо как произведение $k \geq 2$ одинаковых слов

u, w — циклически сравнимы, если $\exists$ предст. $u = u_1 u_2$, $w = w_1 w_2$;
асс. сл.

$u_1 = w_2$, $u_2 = w_1$.

$\boxed{\text{Лемма 4}}$ В каждом классе непериодических есть ровно 1 прав

$\boxed{\text{Лемма 5}}$ В классе непериодических — нет.

$\psi_q(n)$ — ранг модуля однородных многочленов степени q в своб. кольце L_n с n образующими

= кол-во прав. слов длины q

$$n^q = q\psi_q(n) + d_1 \psi_{d_1}(n) + \dots + d_s \psi_{d_s}(n) \qquad d_i \text{ — делители } q$$

Дедекинд-Мебиус $\quad \psi_q(n) = \frac{1}{q} \sum_{s|q} \mu(s) n^{q/s}$ ← ф. Мебиуса

Ур-я $xa = yb$ в своб. алгебре Ли $L[a, b]$ $(*)$

$L[a, b]$ — своб. алгебра Ли от a и b.

x, y — неизвестные, прин. значения в $L[a, b]$

$\boxed{\text{Опр.}}$ (x_0, y_0) — <u>решение</u> ур-ния $(*)$, если верно $x_0 a = y_0 b$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Решение тривиально, если $x_0 a = 0$, $y_0 b = 0$

$$\underline{a}\, a = \underline{b}\, b \quad \text{— трив}$$
$$\underline{0}\, a = \underline{0}\, b$$
$$b\, a = -a\, b \quad \text{— нетрив}$$

нужно искать только <u>однородные</u> решения

решений степени 2 нет

$(\cancel{ab})c$

$(uv)w = (uw)v - (vw)u$

Gordeev — Rehmann, ? algebra
про ур-ния в п/п группах