Неунимодулярные группы

$R (= \mathbb{Z})$ — кольцо (или $\mathbb{Z}[1/2]$) с инволюцией

$$h : V \times V \longrightarrow R$$

$$\Updownarrow$$

$$V \xrightarrow{\tilde{h}} V^* \quad \text{гомоморфизм}$$

Во всех теоремах ~~это из~~ рассматривается только случай ~~невырожденной~~ унимодулярной формы, когда $\tilde{h}$ — изоморфизм

$$O(n, R, G) = \{ x \in GL(n, R) \mid x G x^T = G \} \qquad \text{матрица Грама} \quad G^T = G$$

G — обратима

↳ над полем любая матрица $\sim \left(\begin{array}{c|c} G_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

$$\rightsquigarrow O(n, R, G) = \left(\begin{array}{c|c} O(m, R, G_0) & * \\ \hline 0 & GL(n-m, R) \end{array} \right)$$

Пусть форма не обязательно унимодулярна.

Вопрос. Когда она допускает примитивное вложение в унимодулярную форму?

$$h : V \times V \longrightarrow R$$

$$V \leq U$$

$$g : U \times U \longrightarrow R \qquad (2)$$

$$g|_{V \times V} = h$$

U/V — свободный R-модуль

Над полем — всегда:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & G_0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c|c|c} y^* & -z & * \\ \hline 0 & x & z \\ \hline 0 & 0 & y \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} x \in O(m, R, G_0) \\ y \in GL(n-m, R) \end{array}$$

Теорема Если $m \geq 5$, $n-m \geq 3$, то норм. подгруппы $O(n, R, G)$ известны

Простенький пример

$$\begin{pmatrix} 2 & & & & & & 0 \\ & 2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 3 & & \\ & & & & & 3 & \\ 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

Eva Bayer-Flückiger — Laura Fainsilber

Inv. Math., 1996.

Теорема Описание неунимодулярных форм над R сводится к описанию унимодулярных форм над другими кольцами.

$$\left(\mathrm{End}_R(V) \xrightarrow{\varepsilon} V^* \right)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}$$

— над ОГИ.

$d = d_1 \ldots d_n$ — дискриминант формы

Полные ответы на все вопросы структурной теории есть только для полулокальных колец, в которых все идеалы главные

B. Pollak

C. Riehm

Chang

Проблема Доказать все структурные результаты для дедекиндовых колец арифметического типа с бесконечной мультипликативной группой

Вопрос При каком условии на форму удастся описать норм. подгруппы в $O(n, R, G)$ для произвольного комм. G?

Задача Учесть форменный параметр

M. Kneser, 1964–1978?