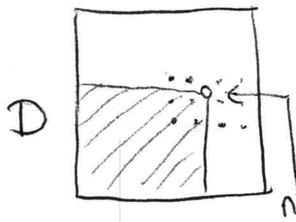
16.04.2009

Fast distance multiplication of unit-Monge matrices

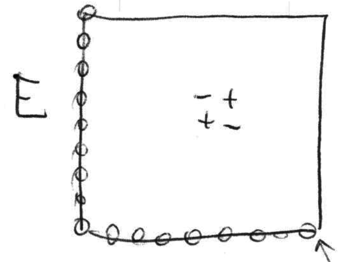
Саша Тискин



D → $D^{\Sigma}(\hat{i},\hat{j}) = \sum_{\hat{i}>i,\ \hat{j}<j} D(i,j)$

distribution matrix — больше на 1

полуцелые



E → density matrix — меньше на 1

$E^{\square}(i,j) = E(i+1/2, j-1/2) + E(i-1/2, j+1/2) - \ldots - \ldots$

— с этими граничными условиями (т.е. simple)

$(D^{\Sigma})^{\square} = D$

$(E^{\square})^{\Sigma} = E$

E — матрица Монжа, если $E^{\square} \geq 0$ — Monge matrix

Пусть $E^{\square}$ — матрица перестановки $\Leftrightarrow$ E — (simple) unit-Monge matrix — их $n!$

Тропическое умножение (a.k.a. tropical, distance, a.k.a. min-plus)

— вместо $\oplus$ — минимум

— вместо $\odot$ — сложение.

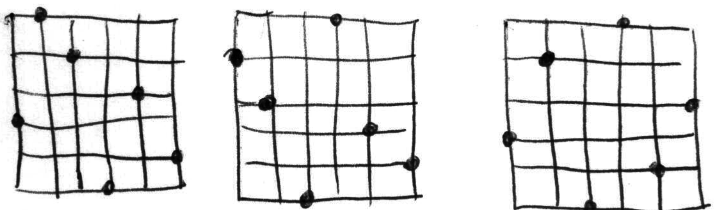
$A \odot B = C$, где $C(i,k) = \min_j (A(i,j) + B(j,k))$

$(A \oplus B$ — поэлементный min) → полукольцо

Все матрицы Монжа замкнуты относительно $\odot$. Кроме того,

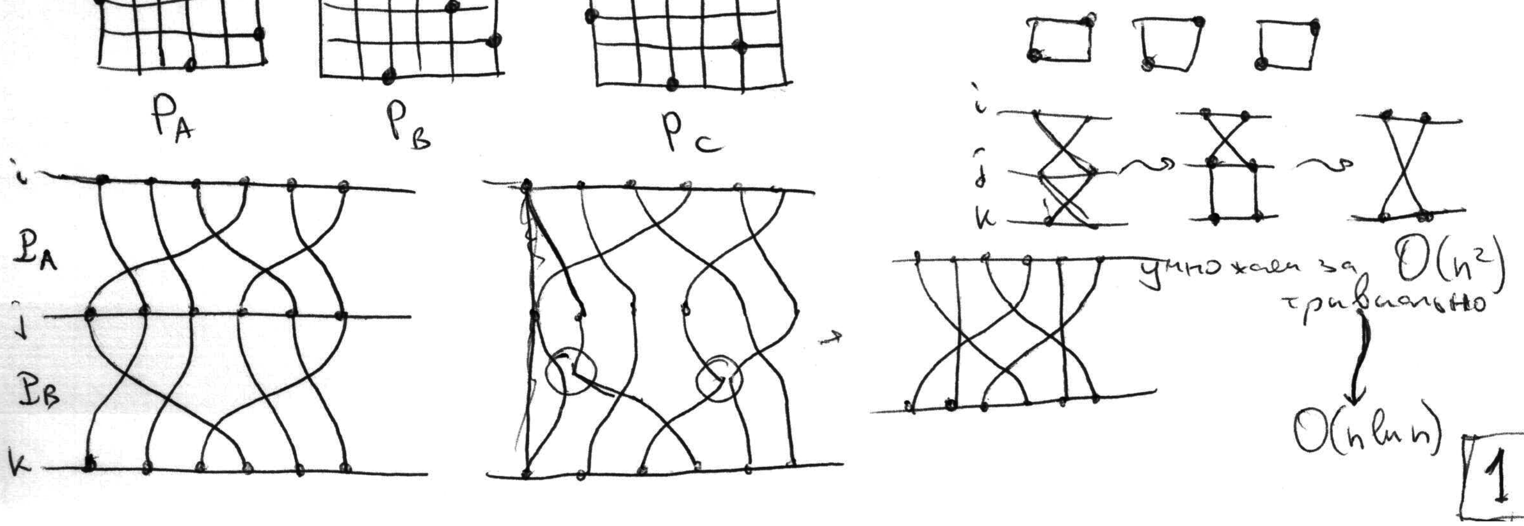
Simple unit-Monge matrices —"—"— .

→ seaweed monoid



P_A P_B P_C

$P_A^{\Sigma} \odot P_B^{\Sigma} = P_C^{\Sigma}$



умножаем за $O(n^2)$ тривиально → $O(n \ln n)$

Тропическое умножение общих матриц — $O(n^3)$

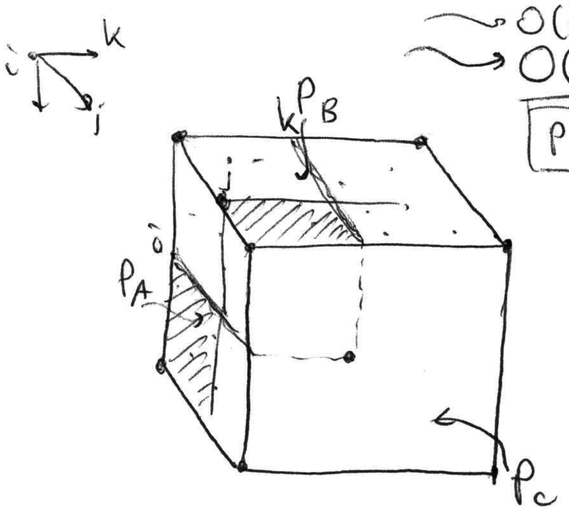
нет аналога алгоритма Штрассена!

матрицы Монжа — $O(n^2)$ — хорошо известно.

$\to O(n^{1.5})$ — 2006 (доклад на CSR)

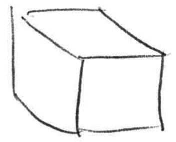
$\to O(n \ln n)$ — 2009

$\boxed{\text{Рекурсия}}$

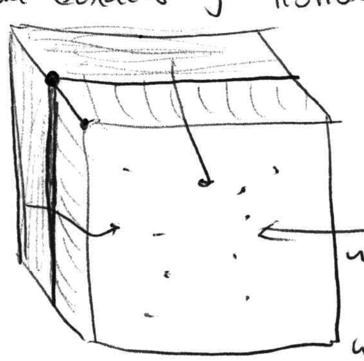


— так нужно рисовать обычное умножение матриц:

— параллельное



Поделим область j пополам



Вычеркнем нулевые строчки в красной части P_A

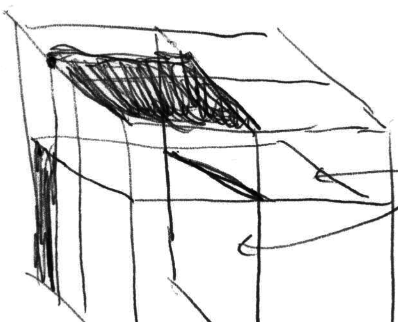
и нулевые столбцы в красной части P_B — получатся тоже перестановочные матрицы

красные единицы

их $n/2$

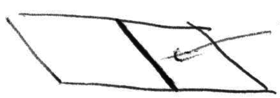
Потом то же — в синей подзадаче.

их тоже $n/2$, в сумме получается перестановочная матрица



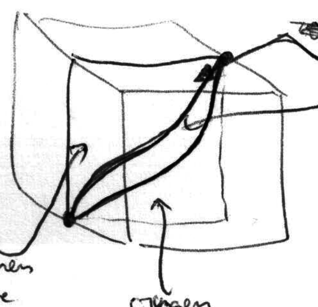
Если $j < n/2$, то в A в красной подзадаче все OK, а в B суммируются и синие.

сечения — тоже матрицы Монжа



то j, которое дает min, должно быть монотонно в горизонтальной плоскости и в каждой верт. плоскости

Нас интересует только сечение при $j = n/2$



~~это матрица~~

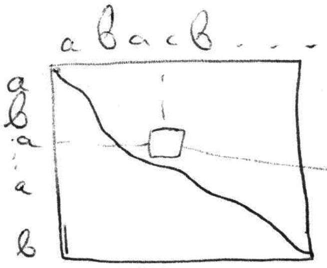
наше множество монотонное как-то пересекает это сечение

стираем ~~все~~ отсюда

стираем синие

стираем красные.

Основная область приложения — вычисления на строках



— ищем наибольшую общую подпоследовательность (не обязательно подстроку)

если символы не совпадают, то 

если совпадают — 

— ориентированный граф

~~кратчайший~~ max путь соответствует наибольшей общей подпос-сти

— approximate pattern matching (и даже лучше, ибо для каждой подстроки)

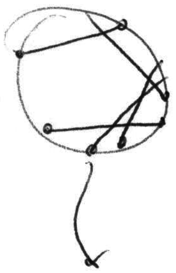
→ вычислительная биология

~→ $O(n^2)$ вычисляет всю матрицу — для каждой подстроки с образцом.

можно локально сравнивать две подстроки, и это можно ускорять!

Менее практические приложения:

• Круговые графы



— Найти max число взаимно пересекающихся хорд

→ circle graph — maximal clique in it.

$O(n^3)$ — 1970-е

$O(n^2)$ — 1990-е

~ и это же — неевклидова геометрия!

Водоросли ~ $O(n \ln^2 n)$

• сравнение запакованных файлов

Запаковка — это контекстно свободная грамматика (размер м.б. экспоненциален)

можно ли их сравнить, не распаковывая?

Вообще-то нет — это NP-полная (Ю. Лифшиц)

Но если запакован только 1

$m \longrightarrow \bar{m} \qquad \bar{m} \ll m$

$n \longrightarrow$ метод водорослей...

$\downarrow$

$O(\bar{m}\, n \ln n)$

$\boxed{\text{Н.А.В.}}$ Что здесь происходит?

B_n: образующие и соотношения: $rs=sr$ $\quad \overset{}{o}-\overset{r}{o}-o-\overset{s}{o}-o\ldots$

$rsr=srs$ $\quad o-\overset{r}{o}-\overset{s}{o}-o-o\ldots$

Если добавим $s^2=1$ $\rightsquigarrow$ получим $S_n = W(A_n)$

Давайте добавим другое соотношение:

$s^2=s$ ← seaweed

$\rightsquigarrow$ получим моноид $SW(n)$

$S_n \longleftrightarrow SW_n$ — биекция множеств

$B\backslash GL_n/B$ — клетки в разложении Брюа

BwB

$G = GL(n,k)$

$B = B(n,k) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$

замыкания тассов! $\overline{BwB}$

$GL(2,k)$

$B = \begin{pmatrix} * & \bullet \\ 0 & * \end{pmatrix} \qquad BsB = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet \\ * & \bullet \end{pmatrix}$

$B^2=B$, $\quad B\cdot BsB = BsB\cdot B = BsB$

$BsB\cdot BsB = BsB\cup B$

формула Шевалле-Титса

$1^2=1$, $1\cdot s = s\cdot 1 = s$

$s^2 = s+1$ ← булева алгебра Гекке

$s^2=(q-1)s+q$ ← алгебра Гекке $H(G,B)$

Базис в алг. Гекке соответствует S_n — эл-там W

а если взять базис, отв. тому, что каждый элемент заменяется на $\sum$ всех меньших его.

Переход между базисами — $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← т.е. замыкания тассов: $BsB\cup B = \overline{BsB}$

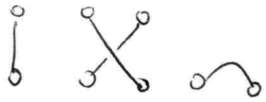
$\rightsquigarrow$ мы умеем быстро вычислять в алгебрах Гекке, тут $\overline{BsB}^2 = \overline{BsB}$

Группа Брискорна-Артина (аналог B_n для остальных групп Вейля)
и добавляем соотношение $s^2=s$.

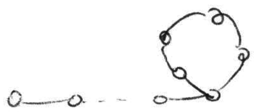
Еще одна мысль: это не должна быть группа:
симметрический моноид — матрицы субперестановки.

tangles — умножение неквадратных матриц.

sample — сампл



Также профакторизовав B_n по $s^4=1$ и получим $N(n,\mathbb{Z})$
А если по другим?



← циклические моноиды

$s^3=s^2$
$s^3=s$
...