7.05.2009
Настя

Глава 2 (или 3) диссертации:

Йордановы системы и алгебраические группы

R — комм. кольцо с 1

$\mathcal{L}$ — к/п $\mathbb{Z}$-градуированная алгебра Ли над R

(явл. проективным модулем постоянного кон. ранга над R)

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=-n}^{n} \mathcal{L}_i$$

$n \in \mathbb{N}$

$V(\mathcal{L}) = (\mathcal{L}_i, i \in \underline{n}\}$ ← йорданова система, ассоциированная с $\mathcal{L}$

$\underline{n} = \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$

с операциями

$$q_{ij} : \mathcal{L}_i \times \mathcal{L}_j \longrightarrow \mathcal{L}_{i+j} \quad \text{при } i \neq j$$

$$(a, b) \longmapsto [a, b]$$

$$d_{i,-i,j} : \mathcal{L}_i \times \mathcal{L}_{-i} \times \mathcal{L}_j \longrightarrow \mathcal{L}_j$$

$$(a, b, c) \longmapsto [[a, b], c]$$

Прим.: $\mathcal{L} = \mathrm{Lie}(G)$, G — п/~~простая~~ изотропная алг. группа над R

$S \subseteq G$ — 1-мерный расщепимый подтор

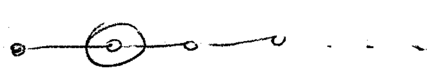
$S \curvearrowright \mathrm{Lie}(G)$ — он действует

$S = \mathrm{Spec}(R[x, x^{-1}])$ ⇝ веса — целые числа

⇝ на $\mathrm{Lie}(G)$ есть $\mathbb{Z}$-градуировка

⇝ там есть $V(\mathrm{Lie}(G))$ — йорданова система.

$= (\mathrm{Lie}(G)_i, i \in \underline{n})$



→ остается

Информация о $V(\mathrm{Lie}(G))$ позволяет восстановить G с точностью до изогении!

$SL_4 \hookrightarrow SL_5$

— даже гомоморфизм групп можно восстановить по гомоморфизму йордановых систем, но это ещё не доказано.

т.е. категория групп с тором (что для изоморфизма — доказано) эквив. категории йорд. систем со свойством:

Опр. $\mathcal{V} = (V_i, i \in \underline{n})$ над R с $q_{i,j}, d_{i,-i,j}$ т.ч. $(2n)! \in R$, называется <u>алгебраической</u>, если

$$\mathcal{L}_i(V) = \bigoplus_{i \in \underline{n}} V_i \oplus \Big(\sum_{i \in \underline{n}} \operatorname{End} V_i\Big)$$

$$\underset{V_i}{[a}, \underset{V_j}{b]} = \begin{cases} q_{i,j}(a,b), & i \neq -j \\ \sum_i d_{i,-i,j}(a,b,-), & i = -j \end{cases} \in \operatorname{End}(V_k)$$

Присоединенное предст.:

$$\mathcal{L}(V) \longrightarrow \operatorname{End}(\mathcal{L}(V))$$
$$a \longmapsto \mathrm{ad}_a^{(k)}$$

$$\mathrm{ad}_a^{(k)}(x) = \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j \leq 2n}} \frac{1}{i!}(\mathrm{ad}_a)^i \circ x \circ (-\mathrm{ad}_a)^j \frac{1}{j!}$$

$$k \leq 2n \rightsquigarrow \mathrm{ad}_a^{(k)} = \frac{1}{k!}(\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_a})^k$$

$$\text{(A)} \quad \mathrm{ad}_a^{(k)}(\mathrm{ad}_b) = 0 \quad \forall a \in V_i,\ b \in V_j, \quad i,j \in \underline{n}$$

$$2n < k \leq 3n$$

— это св-во гарантирует, что й.с. получилась из алг. группы

<u>Идеал</u> $\mathcal{V} = (V_i, i \in \underline{n}) \supseteq I = (I_i)$ — набор подмодулей, инв. отн-но операций и

$$q_{i,j}(V_i, I_i) \subseteq I_{i+j}$$
$$d_{i,-i,j}(V_i, V_{-i}, I_j) \subseteq I_j$$
$$d_{i,-i,j}(I_i, V_{-i}, V_j) \subseteq I_j$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Йорданова система называется сепарабельной, если $\forall K/R$ пол. $\mathcal{V}\otimes_R K$ не содержит ненулевых идеалов, сужение $q_{i,j}, d_{i,-i,j}$ на которые ~~не содержат~~ тривиальны (т.е. равны 0)

(≈ Loos, сепарабельная йорданова пара)

Действительно

Если G не п/прост $G = H \ltimes R_u(G)$

$R_u(G) \supseteq [R_u(G), R_u(G)] \supseteq \dots$ убывающий централ ряд

$\dots \supseteq R_u(G)^n \supseteq 0$

$\mathrm{Lie}(R_u(G)^n) =$ аб. алгебра Ли

⇝ соотв. кусок задает такой нетрив. идеал.

R: $(2n)! \in R^\times$,

$\mathcal{G}$ — категория приведен. п/п алг. групп над R, таких, что каждый неразложимый множитель G изотропен высоты $\le n$

$\mathrm{Mor}(\mathcal{G})$ = изоморфизмы (т.е. это группоид) | т.е. на своей алг. Ли градуировка имеет высоту $\le n$.

$\mathcal{J}$ — кат. сепарабельных алг. й. систем высоты $\le n$

$\mathrm{Mor}(\mathcal{J})$ = изоморфизмы

$\boxed{\text{Теорема}}$ $G \longrightarrow \mathcal{V}(G) = (\mathrm{Lie}(G)_i,\ i\in \underline{n})$

— эквивалентность категорий $\mathcal{G}$ и $\mathcal{J}$.

≈ Обратный функтор

$$\left(\mathrm{Aut}(\widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{V}))\right)^0 \longleftarrow \mathcal{V} = (\mathcal{V}_i,\ i \in \underline{n})$$

$\mathcal{L}(\mathcal{V})$

Как доказать про эту связную компоненту, что она вообще гладкая и представима?

$\mathcal{V}=(\mathcal{V}_i,\ i\in\underline{n})$ $\quad \mathcal{V}_+ = \bigoplus_{i>0}\mathcal{V}_i$ $\quad \mathcal{V}_- = \bigoplus_{i<0}\mathcal{V}_i$

$\mathfrak{X} = W(\mathcal{V}_+)\times W(\mathcal{V}_-)/\sim$

— гладкая предст. схема. В G это должно соответствовать $P^-\backslash G$

P^-, P^+

$P^- U V \longleftrightarrow (U, V)$

$\mathcal{V}_+ = \mathrm{Lie}(U^+)$, $\quad \mathcal{V}_- = \mathrm{Lie}(U^-)$

Теорема Демазюра

$\exists X$ — гладкая проект. схема над схемой S

т.ч. $\forall s \in S$ $\quad X \times_S \overline{k(s)} \cong G/P$ для некоторой

полупростой $G/_{\overline{k(s)}}$ и $P \leq G$ — параболическая.

Тогда $\mathrm{Aut}(X)$ — присоед. полупростая группа над S.

Есть такие случаи:

$$G_2/P_1 \simeq B_3/P_3$$

$$B_l/P_l \cong D_{l+1}/P_{l+1}$$

$$C_l/P_1 \cong A_{2l-1}/P_1$$

То есть,

 $\rightsquigarrow \mathrm{Aut}(X)^0 = B_3$