28.09.09

Относительная коммутационная формула

А. Ананьевский

(Хазрат, Джанг)

– Generalized commutator formulas

R. Hazrat, Z. Zhang

A – асс. кольцо с 1

$GL_n(A)$, $E_n(A) = \{e_{ij}(\xi) \mid i \neq j,\ \xi \in A\}$

$I \trianglelefteq A$ (двусторонний) $\qquad A \longrightarrow A/I$

$$\rho_I : GL_n(A) \longrightarrow GL_n(A/I)$$

$\operatorname{Ker} \rho_I = GL_n(A, I)$ – главная конгруэнц-подгруппа

$$E_n(I) = \langle e_{ij}(\xi) \mid \xi \in I \rangle$$

$$^{E_n(A)}E_n(I) =: E_n(A, I)$$

коммутационные формулы:

$$[E_n(A,I), GL_n(A)] = E_n(A,I)$$

$$[E_n(A), GL_n(A,I)] = E_n(A,I)$$

– верны, например, когда A – коммутативно и $n \geq 3$ или когда $n > sr(A)$ и $n \geq 3$

$$[E_n(A,I), GL_n(A,J)] = [E_n(A,I), E_n(A,J)]$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ A – <u>квазиконечная</u> алгебра над R, если $A = \varinjlim A_i$, ${}_R A_i \in R\text{-mod}$ – кон. порожденные

$\boxed{\text{Предл.}}$ A – квазиконечная над R $\iff A = \varinjlim A_i$, $R = \varinjlim R_i$, R_i – кон. порожд. $\mathbb{Z}$-алгебры, $A_i \in R_i\text{-mod}$

$\boxed{\text{Замечание}}$ $GL_n(\varinjlim A_i) = \varinjlim GL_n(A_i)$ // см. EGA IV

$$A_m = \varinjlim_{t \in A \setminus m} A_t$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ R – нетерово комм. кольцо, A – мод., к.п. над R, $\Rightarrow \forall t \in R\ \exists l : \ \theta_t : GL_n(A, t^l A) \longrightarrow GL_n(A_t)$ инъективно

// Достаточно, что $\exists l : t^l A \longrightarrow A_t$ – инъективно

// $\measuredangle$ $\operatorname{Ann}(t^i)$ – стабилизируются.

$\boxed{\text{Лемма}}$[3] A – к/п. мод. над R, $I, J \trianglelefteq A$, $t \in R$, $k, l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists p$:

$$[E_n^1(t^p I), E_n^k(A/t^m, J/t^m)] \leq [E_n(t^l A, t^l I), E_n(t^l A, t^l J)]$$

□ потом ■

$\boxed{\text{Лемма 14}}$ $I, J \trianglelefteq A$, $\mathfrak{m} \in \operatorname{Specm} R$, $\forall g \in GL_n(A,J)$

$\exists t \in R\setminus \mathfrak{m}$ и p: $[e,g] \in [E_n(A,I), E_n(A,J)] \trianglelefteq E_n(A)$

$\forall e \in E^1_n(t^p I)$

□ ~~$E_n(A_\mathfrak{m}, I_\mathfrak{m})$~~

${}_{R_\mathfrak{m}}A_\mathfrak{m}$ — полулокальное кольцо

$\Rightarrow sr(A_\mathfrak{m}) = 1$

$\Rightarrow GL_n(A_\mathfrak{m}, I_\mathfrak{m}) = E_n(A_\mathfrak{m}, I_\mathfrak{m})\cdot GL_1(A_\mathfrak{m}, I_\mathfrak{m})$

$\rightsquigarrow \theta(g) = \varepsilon\cdot h$, $\varepsilon \in E_n(A_\mathfrak{m}, I_\mathfrak{m})$, $h = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & *\end{pmatrix}$

и м. считать, $\varepsilon \in E_n(A_t, I_t)$, потому что $\varinjlim$

$\varepsilon \in E^k_n(A_t, I_t)$

$\downarrow$

$E^k_n(A,I) = \{ \overset{e_{i_1m_1}(x_1)}{e_{i_1j_1}(\xi_1)} \dots \overset{e_{i_km_k}(x_k)}{e_{i_kj_k}(\xi_k)} \mid \dots \}$

$\varepsilon \in E^k_n(A/t^n, I/t^n)$

$[\theta_t(e), \theta_t(g)] = [\theta_t(e), \varepsilon] \in [E_n(t^l A, t^l I), E_n(t^l A, t^l J)]$

по лемме 13

теперь использовать инъективность...

■

$\boxed{\text{Th}}$ A — мод.-кон. над R, $I, J \trianglelefteq A$, $n \geq 3$

$\Rightarrow [E_n(A,I), GL(A,J)] = [E_n(A,I), E_n(A,J)]$.

□ „$\supseteq$" — очевидно; „$\subseteq$":

$[E^1_n(I), GL_n(\underset{g}{A}, J)] \overset{?}{\subseteq} [E_n(A,I), E_n(A,J)]$

$\mathfrak{m}_i \in \operatorname{Specm} R \xrightarrow{g} p_i, t_i \in R\setminus \mathfrak{m}_i$:

$\langle t_i^{p_i} \rangle = R$ $\rightsquigarrow$ м. выбрать кон. число

$\rightsquigarrow \sum_{k=1}^{m} t_k^{p_k} x_k = 1$

$[e_{ij}(\alpha), g]$

$e_{ij}(\alpha) = \prod_{k=1}^{m} e_{ij}(t_k^{p_k} x_k \alpha)$

коммутирование g с каждым попадает куда нужно

$[\prod e_{ij}(t_k^{p_k} x_k \alpha), g]$

$[ab, c] = {}^a[b, c]\cdot[a, c]$

$[{}^b a, c] = {}^b[a, {}^{b^{-1}}c]$

■

Возвращаемся к лемме 13:

$\boxed{\text{Лемма 13}}$ $I, J \trianglelefteq A$, $t \in R$, $k, l, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists p$:

$$[E_n^1(t^pI), E_n^k(A/t^m, J/t^m)] \leq [E_n(t^lA, t^lI), E_n(t^lA, t^lJ)]$$

$\boxed{\text{Лемма 5}}$ ${}^{E_n^1(A/t^m)}E_n^1(t^p\langle\alpha\rangle) \subseteq E_n(t^lA, t^l\langle\alpha\rangle)$

$\boxed{\text{Лемма 6}}$ ${}^{E_n^1(A/t^m)}E_n^*(t^p\langle\alpha\rangle) \subseteq E_n(t^lA, t^l\langle\alpha\rangle)$

$\boxed{\text{Лемма 7}}$ ${}^{E_n^1(A/t^m)}E_n(t^pA, t^p\langle\alpha\rangle) \leq E_n(t^lA, t^l\langle\alpha\rangle)$

$$ {}^{E_n^1(A/t^m)}\,{}^{E_n(t^pA)}E_n(t^p\langle\alpha\rangle) \leq {}^{\left({}^{E_n^1(A/t^m)}E_n(t^pA)\right)}\left({}^{E_n^1(A/t^m)}E_n(t^p\langle\alpha\rangle)\right)$$

$\boxed{\text{Лемма 8}}$ ${}^{E_n^1(A/t^m)}[E_n(t^pA, t^p\langle\alpha\rangle), E_n(t^pA, t^p\langle\beta\rangle)] \leq$

$$\leq [E_n(t^lA, t^l\langle\alpha\rangle), E_n(t^lA, t^l\langle\beta\rangle)]$$

$\boxed{\text{Лемма 9}}$ $\cancel{[E_n^1(t^pA), E_n^1(}$

$$[E_n^1(t^p\langle\alpha\rangle), E_n^1(\langle\beta\rangle/t^m)] \subseteq [E_n(t^lA, t^l\langle a\rangle), E_n(t^lA, t^l\langle\beta\rangle)]$$

$p = 2q$

$$\rho = [e_{ij}(t^{2q}a), e_{ji}(b/t^m)]$$

$${}^{e_{hj}(-t^q)}\rho = {}^{e_{hj}(-t^q)}[[e_{ih}(-t^qa), e_{hj}(t^q)]^{-1}, e_{ji}(b/t^m)]$$

т-во Холла-Витта:

$${}^x[[y, x^{-1}]^{-1}, z] = {}^y[x, [z, y^{-1}]^{-1}] \cdot {}^z[y, [x, z^{-1}]^{-1}] \Rightarrow$$

$$\neq {}^{e_{ih}(-t^qa)}[e_{hj}(-t^q), e_{jh}(-t^{q-m}ab)] \cdot {}^{e_{ji}(-b/t^m)}[e_{ih}(-t^qa), e_{hi}(-t^{q-m}b)]$$

— целое вычисление в GL_3!

$\boxed{\text{Лемма 10}}$ $[{}^{E_n^1(t^pA)}E_n^1(t^pI), E_n^1(J/t^m)] \subseteq [E_n(t^lA, t^lI), E_n(t^lA, t^lJ)]$

$\boxed{\text{Лемма 11}}$ $[E_n(t^pA, t^pI), E_n^1(J/t^m)] \leq [\dots]$

$\boxed{\text{Лемма 12}}$ $[E_n^1(t^pI), {}^{E^1(A/t^m)}E^1(J/t^m)] \leq [\dots]$