2.11.2009

Настя Ставрова

Совершенность элементарной подгруппы

G — редукт. алг. группа над R

$\operatorname{Spec} R$; $s \in \operatorname{Spec} R \longrightarrow k(s)$

$\forall s \in \operatorname{Spec} R$ $G(\overline{k(s)})$ — ред. алг. группа над з. полем $\overline{k(s)}$

$G_{\overline{k(s)}} \longrightarrow \Phi_{\overline{k(s)}}$ — система корней

$\downarrow$

$D_{\overline{k(s)}}$ — диаграмма Дынкина

но $K_1 \oplus K_2 \to \underbrace{G(K_1) \times H(K_2)}_{\text{разные}}$

→ будем считать, что G хорошая и $\forall s$ Φ одна и та же D

$\mathbb{G}_m^{rk(\Phi)} \not\subseteq G$

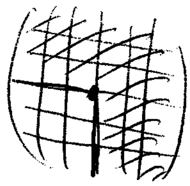
$\mathbb{G}_m \subseteq G \longrightarrow \operatorname{Lie}(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Lie}(G)_i$

$\operatorname{Lie}(P^+) = \bigoplus_{i \geq 0} \operatorname{Lie}(G)_i$

$\operatorname{Lie}(P^-) = \bigoplus_{i \leq 0} \operatorname{Lie}(G)_i$

$\operatorname{Lie}(L) = \operatorname{Lie}(G)_0$

$\to P_3$

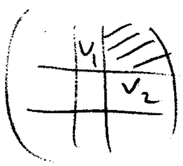


Над лок. кольцом известно, какие наборы параб. подгрупп могут быть — это индексы Титса

$P \supseteq U_P$

$$
\begin{aligned}
&\quad\; \cup\!\!| \\
&U_P^2 = [U_P, U_P] \\
&\quad\; \cup\!\!| \\
&\quad\; \vdots \\
&\quad\; \cup\!\!| \\
&U_P^n = \{e\}
\end{aligned}
$$

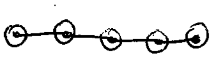
$L \curvearrowright U_P^k / U_P^{k+1}$ — прямая сумма неприводимых модулей Вейля



$L \curvearrowright V_1$

$L \curvearrowright V_2$

B :



$LG\, V_k = \mathcal{U}^k / \mathcal{U}^{k-1}$

$G \ni X_A(v)$

$A \in \Phi_P$

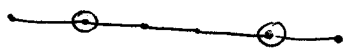
$v \in V_A$ — к/порожд. проективный R-модуль

$\downarrow$

$G_{\overline{k(s)}}$ $\rightsquigarrow$ знаем $X_A(v) = \prod x_\alpha(u_\alpha)$

$\Phi_P = \Phi_{J,\Gamma}$

D



$J \subseteq \Pi$ — Γ-инвариантно

мн-во простых корней

$\Gamma \subseteq Aut(D)$

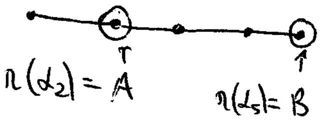
(≤ 6 элементов)

$Q(\Phi) = \mathbb{Z} \cdot \Phi$

$\pi : Q(\Phi) \longrightarrow Q(\Phi) \Big/ \langle \Pi \setminus J, \alpha - \sigma(\alpha) \rangle_{\sigma \in \Gamma}$

$\Phi_{J,\Gamma} = \pi(\Phi) \setminus \{0\}$ — система относительных корней

(1)



$\Gamma = \{e\}$

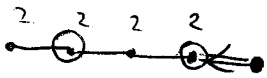
$A + B = \pi(\,..\,)$

$\pi^{-1}(A+B) = \{\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\}$

$\Phi_{J,\Gamma} = \{\pm A, \pm B, \pm(A+B)\}$

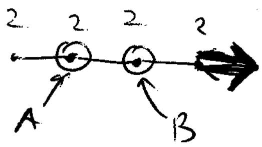
$\simeq A_2$

(2)



$\rightsquigarrow BC_2 \cong \Phi_J$

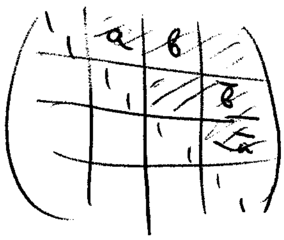
(3) B_6:



$\rightsquigarrow A, B, A+B, A+2B, 2A+2B, \cancel{2B}, \cancel{2A}$

A_4

C_4:



$A \in \Phi_\rho = \Phi_{J,\Gamma}$

$$X_A(v) = \prod_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} x_\alpha(c_\alpha)\cdot \prod_{\beta\in\bigcup_{i\geq 2}\pi^{-1}(iA)} x_\beta(p_\beta(\{c_\alpha\}))$$

$H = [H, H]$ — совершенность

$$v = \sum_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} c_\alpha e_\alpha$$

$$V = \langle e_\alpha, \alpha\in\pi^{-1}(A)\rangle$$

$$p_\beta : \{c_\alpha\}_{\alpha\in\pi^{-1}(A)} \longmapsto \{d_{\alpha'}\}_{\alpha'\in\pi^{-1}(iA)}$$

$$\{\lambda c_\alpha\} \longmapsto \{\lambda^i d_{\alpha'}\}$$

$$E_\rho(R) = \langle U_\rho(R), U_{\rho^-}(R)\rangle = \langle X_A(v), A\in\Phi_\rho, v\in V_A\rangle$$

$\boxed{\mathrm{rk}\,\Phi_\rho \geq 2}$

кол-во орб. вершин (если $\Gamma = \{e\}$)

ранг аб. группы $\Lambda(Q(\Phi))$

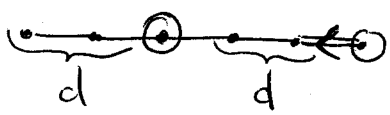
Цель: д-ть, что $E_\rho(R)$ совершенна при некоторых предположениях

$\Phi = B_2, C_2,\ \mathbb{F}_2$

$G_2,\ \mathbb{F}_2,$ } исключения

Остался случай: $\Phi = C_l$

Достаточно $\mathrm{rk}\,\Phi_\rho = 2$

J: 

$d = 1$ — пример с кватернионами — самый простой (см. Stein)

— есть ли контрпример?

Гипотеза: Ед. исключение: в случае, когда у R есть поле вычетов $\mathbb{F}_2$ и G-расщепима, $\Phi = \Phi_\rho = B_2$ или G_2