

Доклад Серра

n-Парасеровы формы : k-поле, char k ≠ 2

$a_1, \dots, a_n \in k^*$

$q = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle = \langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$ $\dim(q) = 2^n$

$\langle a, b \rangle : ax^2 + by^2$

$\langle a, 1 \rangle = \langle 1, -a \rangle = x^2 - ay^2$ - 1-форма Парасера
 $\langle a, b \rangle \langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle = \langle 1, -a, -b, ab \rangle$ - норма k(\sqrt{a})

норма на алгебре квадратичных
 $A = \langle x, y \mid x^2 = a, y^2 = b, xy = -yx \rangle$

~~$\langle 1, -a \rangle \otimes \langle 1, -b \rangle$~~
 $\langle a, b, c \rangle$ - норма на октационах

Чем они важны? Связью с гипотезой Милнора:

$K_n^M(k)/2 \xrightarrow{\sim} H^n(k, \mathbb{Z}/2)$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{нормы} \\ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \end{array} \right\} \mapsto (a_1) \cup \dots \cup (a_n)$

$(a) \in H^1(k, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = k^*/k^{*2}$

Hilbert 90
 $H^i(k) \times H^j(k) \xrightarrow{\cup} H^{i+j}(k)$

Tk^*
 $(a \otimes (1-a) = 0)$
 $\forall a \neq 0, 1$

- $K_0(k) = \mathbb{Z}$ - dim
- $K_1(k) = k^*$ - det
- \vdots

$Pfister_n \longrightarrow H^n(k, \mathbb{Z}/2)$

$\langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle \longmapsto (a_1) \cup \dots \cup (a_n)$
 (чистый) символ

$K_n^M(\mathbb{F}_q) = 0 \quad \forall n \geq 2$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{простые} \\ \text{алг. группы над полем } k \end{array} \right\}$ или Φ $\xrightarrow{?}$ Pfister $H^n(k, \mathbb{Z}/2)$

группировочно по k
 расширение k

Ex. ① $\Phi = G_2$
 $H^2(-, G_2) \longrightarrow H^3(-, \mathbb{Z}/2)$
 норма октационов \rightarrow это Биллингс

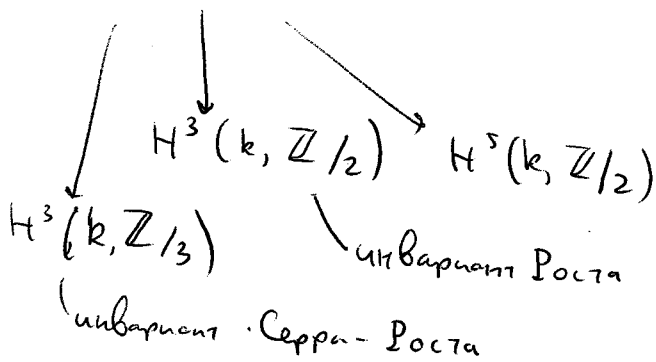
② $\Phi = A_1$
 $H^4(k, PGL_2) \longrightarrow H^2(-, \mathbb{Z}/2) = {}_2Br(k)$

автоморфизмы
 квадратичных
 центр. простые
 алг. над k
 степени 2 \rightarrow ее класс [A] в группе Брауэра

③ $\Phi = F_4$
 $H^1(k, F_4)$

$\Phi = G_2, A_1, F_4, E_8$

$H^1(-, \Phi) = \{ \text{простые алг. группы типа } \Phi \}$



Утверждение Серра-Роста:
 Если знаем эти 3 инварианта,
 то знаем и группу.

$H^1(k, F_4) \rightarrow H^3(k, \mathbb{Z}/3)$

первая конструкция Татта:

A -ч.п.с. $\deg = 3$
 $c \in k^* \rightsquigarrow$ группа типа F_4

$A \oplus A \oplus A \rightarrow$ Jordanово умножение, подкручение на c .

$\rightarrow [A] \cup (c) \in H^3(k, \mathbb{Z}/3)$

④ Инвариант Роста

$H^1(k, G) \rightarrow H^3(k, \mu_n^{\otimes 2})$

Серр, 1959. однодв. n-простая группа

$E_8(\mathbb{C}) \geq PG(2, 3, 1)$

$E_8(K) \geq ?$

$K = \mathbb{Q} - \text{неверно}$
 \mathbb{R}

$\text{char}(K) = 0$

$\text{Ker} (H^1(k, E_8) \xrightarrow{\text{инв. Роста}} H^3(k, \mathbb{Z}/4)) \rightarrow H^5(k, \mathbb{Z}/2)$

$k = \mathbb{Q}$
 "конн." группа типа E_8

или даже Pfisters

\rightarrow что-то в $H^5(k, \mathbb{Z}/2)$
 это $(-1) \cup (-1) \cup (-1) \cup (-1) \cup (-1)$

Order и в.нос Серра:

лежит $\Leftrightarrow (-1)^5 = 0$ в $H^5(k, \mathbb{Z}/2)$

сумма 32 квадратов

$\Leftrightarrow -1 = \sum 16 \text{ квадратов в } K$

см. Кассерс-Фриш