9.11.2009
Н.А.Вавилов

Roozbeh Hazrat, N. Vavilov, Zuhong Zhang

Relative unitary comm. calculus

$\mathcal{U}(2n, \underbrace{R, \Lambda}_{\text{form ring}})$ — Bak's unitary groups

$GL(n, R)$

$A, B \trianglelefteq R$

$1 \longrightarrow GL(n,R,A) \longrightarrow GL(n,R) \longrightarrow GL(n, R/A)$

$g \longmapsto g + A$

главная конгруэнц-подгруппа уровня A

$E(n,R,A) = E(n,A)^{E(n,R)}$

относительная элементарная подгруппа

$E(n,A) = \langle t_{ij}(\xi) \mid 1 \le i \ne j \le n, \xi \in A \rangle$

$n \geq 3$, R — коммутативно

$[E(n,R,A), GL(n,R,B)] = [E(n,R,A), E(n,R,B)]$

Суслин: $GL(n,R,R) = GL(n,R)$, $E(n,R,R) = E(n,R)$

абсолютные группы

$B = R$: $[E(n,R,A), GL(n,R)] = E(n,R,A)$

т. нормальности Суслина

$A = R$: $[E(n,R), GL(n,R,B)] = E(n,R,B)$

$n \geq 3 \Rightarrow [E(n,R,A), E(n,R)] = E(n,R,A)$

для любого кольца

Что такое локализация? Пусть R коммутативно

$m \in Max(R)$ $\quad S \subseteq R^{\bullet}$ — мульт. система $\quad \rightsquigarrow S^{-1}R$

$\rightsquigarrow R_m = (R \setminus m)^{-1} R$ — <u>максим.</u> локализация $F_m : R \longrightarrow R_m$

$F_S : R \longrightarrow S^{-1}R$ — не инъективен для колец с делителями нуля

$s \in R \rightsquigarrow \langle s \rangle = \{1, s, s^2, \dots\}$, s — не нильпотент

$R_s = \langle s \rangle^{-1} R$, $F_s : R \longrightarrow R_s$ — <u>главная</u> локализация

Формула $SL(n,R)=E(n,R)$

верна $\forall$ лок. кольца, т.е.

$$SL(n,R_{\mathfrak{m}}) = E(n,R,\mathfrak{m}) \not\Rightarrow SL(n,R)=E(n,R)$$

Как бороться с тем, что в R есть делители нуля?

I. Квиллен–Суслин: вбрасывание полиномиальных переменных (1976)

$R[t]$, а потом $t \longmapsto s$

<u>Лемма Квиллена–Суслина</u>

П $g \in GL(n, R[t], tR[t])$

Тогда $g \in E(n, R[t]) \iff F_{\mathfrak{m}}(g) \in E(n, R_{\mathfrak{m}}[t])$

для любого $\mathfrak{m} \in Max(R)$

II. Бак: нётерова редукция (1990)

GL_n и E_n коммутируют с прямыми пределами

$$R = \varinjlim R_i \rightsquigarrow GL(n,R) = \varinjlim GL(n,R_i)$$

$$E(n,R) = \varinjlim E(n,R_i)$$

Мы это используем в двух ситуациях:

1) $R = \cup R_i$, где R_i – кон. порожд. подкольца в R

нётеровы

$$\begin{tikzcd} & R & \\ & R_1R_2 \arrow[u] & \\ R_1 \arrow[ur] & & R_2 \arrow[ul] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & R & \\ & \vdots \arrow[u] & \\ & R_{st} \arrow[u] & \\ R_s \arrow[ur] & & R_t \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

2) $S^{-1}R = \varinjlim_{s\in S} R_s$

Таким образом, при локализации можно предполагать, что кольца нётеровы

$F_t : R \longrightarrow R_t$ не явл. инъективным

$\boxed{\text{Лемма}}$ Если R нётерово, то $\forall$ ненильпотентного t

$\exists m \in \mathbb{N}$ т.ч. $F_t : t^m R \longrightarrow R_t$ инъективно

$0 = Ann(1) \leqslant Ann(t) \leqslant Ann(t^2) \leqslant \dots$

$\rightarrow \exists m : Ann(t^m) = Ann(t^{m+1}) = \dots$

$$\underset{a\in R}{F_t(t^m a)} = 0 \iff \exists l \in \mathbb{N} : \underset{t^{m+l}a}{\underbrace{t^l t^m a}} = 0 \rightsquigarrow t^m a = 0$$

$g \in SL(n, R)$

$F_m(g) \in E(n, R_m)$, $m \in Max(R)$

Попытаемся д-ть, что $E(n,R) \trianglelefteq GL(n,R)$

После локализации $E = SL$?

$\rightsquigarrow E(n, R_m) = SL(n, R_m) \trianglelefteq GL(n, R_m)$

$g \in GL(n,R)$

$t_{ij}(\xi) \in E(n,R)$

$g\, t_{ij}(\xi)\, g^{-1} \in E(n,R)$?

$$\underbrace{t_{ij}(\xi)}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle \prod_{h=1} t_{ij}(\xi\zeta_h)}$$

где $\zeta_1 + \dots + \zeta_n = 1$ ← разложение 1

$g\, t_{ij}(s^M \xi)\, g^{-1}$ ← маленький в s-адической топологии

$\cancel{F_s(g\, t_{ij}(s^M\xi)\, g^{-1}) \in E(n, R_s)}$

$F_m(g\, t_{ij}(s^M\xi)\, g^{-1}) \in E(n, R_m)$ $\forall m \in Max(R)$ $s \notin m$

Меняя s, можно считать, что

$$F_s(g\, t_{ij}(s^M\xi)\, g^{-1}) \in E(n, R_s)$$

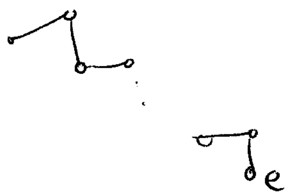
$$\| \qquad \text{yoga of conjugation}$$

$$t_{i_1j_1}(F_s(s^m a_1)) \dots t_{i_nj_n}(F_s(s^m a_n))$$

и $a_1, \dots, a_h \in R$ ← тут F_s – inj

$\rightsquigarrow t_{i_1j_1}(s^m a_1) \dots t_{i_nj_n}(s^m a_n) = g\, t_{ij}(s^M\xi)\, g^{-1}$

$g\, t_{ij}(\xi)\, g^{-1}$



$1 = s_1^{M_1} + \dots + s_q^{M_q}$ – patching

(см. Дошба в книге Lam)

$s,t \in R \quad \forall l,m,b,d \ \exists a,c$

$$F_{st}: \left[E\left(n,R,\frac{s^a}{t^b}R\right), E\left(n,R,\frac{t^c}{s^d}R\right)\right] \le E(n,R,s^m t^l R)$$

$$E\left(n,A,\frac{s^{\cdots}}{t^{\cdots}}A\right)$$

$$E(n,R)=\bigcup E^k(n,R) \qquad E(n,R,A^2) \le E(n,A)$$

$$E(n,R,A) \ne \bigcup E^k(n,R,A)$$

$$[E(n,R,A), GL(n,R,B)] = [E(n,R,A),E(n,R,B)]$$

до сих пор: $E(n,t^mA)$ или $E(n,A,t^mA)$

Они расс $\cancel{E(n,t^mA)}$ $\xrightarrow{\text{между ними}}$ $E(n,A,t^mA) = E(n,t^mA)^{E(n,A)}$

$$E(n,t^mR,t^mA) = E(n,t^mA)^{E(n,t^mR)}$$