16.11.2009

Зудовэно

R — асс. кольцо

stabilization embedding

$$GL(n,R) \hookrightarrow GL(n+1,R)$$

$$g \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$GL(R) = \varinjlim GL(n,R)$$

stable general linear group

$$GL(n,R) \leq GL(n+1,R)$$

$$t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij} \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$$

$$E(n,R) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in R,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle \leq GL(n,R)$$

$$E(R) = \varinjlim E(n,R)$$

st. emb.: $E(n,R) \hookrightarrow E(n+1,R)$

Whitehead lemma

$$E(R) = [GL(R), GL(R)]$$

Def: $K_1(R) = GL(R)/E(R) = GL(R)/[GL(R), GL(R)]$

Quillen

Volodin

$$\pi_I : GL(n,R) \longrightarrow GL(n, R/I)$$ — гомоморфизм редукции

$$(g_{ij}) \longmapsto (g_{ij} + I)$$

$$I \trianglelefteq R$$

$$GL(n,R,I) = \mathrm{Ker}(\pi_I) \trianglelefteq GL(n,R)$$

$$C(n,R,I) = \pi_I^{-1}\big(C(GL(n,R/I))\big) \trianglelefteq GL(n,R)$$

centre

$$E(n,I) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in I,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle \ntrianglelefteq E(n,R)$$

$$E(n,R,I) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in I,\ 1 \leq i \neq j \leq n \rangle^{E(n,R)}$$

$$\varinjlim GL(n,R,I) = GL(R,I)$$

$$\varinjlim E(n,R,I) = E(R,I)$$

$C(n,R,I)$ — нет предела

$\boxed{\text{Thm}}$ $E(R,I) = [E(R), E(R,I)] = [GL(R), GL(R,I)]$

$\downarrow$

$GL(R,I)/E(R,I) = \mathrm{Cent}\left(GL(R)/E(R,I)\right)$

$E(R,I) \trianglelefteq GL(R,I) \leq GL(R)$

$K_1(R,I) = GL(R,I)/E(R,I)$.

$\boxed{\text{Thm. 2.2}}$: $H \leq GL(R)$

H - нормализуем ~~ся~~ $E(R)$

$\to \exists!\ I \trianglelefteq R \quad E(R,I) \leq H \leq GL(R,I)$ и обратное верно.

$(R_1)\ t_{ij}(\xi)\, t_{ij}(\zeta) = t_{ij}(\xi+\zeta)$

$(R_2)\ [t_{ij}(\xi), t_{hk}(\zeta)] = \begin{cases} e, & j\neq h,\ i\neq l \\ t_{ij}(\xi\zeta), & j=h,\ i\neq l \\ t_{hl}(-\xi h), & j\neq h,\ i=l; \end{cases}$

$St(n,R) = \langle x_{ij}(\xi) \mid x_{ij}(\xi)$ удовл. R_1 и $R_2 \rangle$

$n \geq 3$

$\varphi: St(n,R) \longrightarrow E(n,R) \longrightarrow 1$

$x_{ij}(\xi) \longmapsto t_{ij}(\xi)$

$K_2(n,R) = \ker(\varphi)$

$1 \longrightarrow K_2(n,R) \longrightarrow St(n,R) \longrightarrow E(n,R) \longrightarrow 1$

$x_{ij}(\xi) \longmapsto X_{ij}(\xi)$

$x_{ij}(\xi) \in St(n,R)$, $X_{ij}(\xi) \in St(n+1,R)$

$St(R) = \varinjlim St(n,R)$

$\to \quad K_2(n,R) \longrightarrow K_2(n+1,R)$

$St(n,R) \longrightarrow E(n,R)$

$St(R) \longrightarrow E(R)$

$K_2(R) = \mathrm{Ker}(St(R) \longrightarrow E(R))$

$1 \longrightarrow K_2(R) \longrightarrow St(R) \longrightarrow GL(R) \longrightarrow K_1(R) \longrightarrow 1$

$\boxed{\text{Thm}}$ 2.3.

$$St(R) \longrightarrow E(R) \longrightarrow 1$$

– универсальное центральное расширение $E(R)$

$$\Big\downarrow$$

$$St(R) \longrightarrow E(R) \longrightarrow 1$$

$\mathrm{Ker} \leq \mathrm{Cent}$

теория Шура

R – кольцо $\quad R \longrightarrow R$

involution: $\quad a \longmapsto \bar{a}$

$$\overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b}$$
$$\overline{ab} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$
$$\bar{\bar{a}} = a \qquad \forall a, b \in R$$

Fix $\lambda \in \mathrm{Cent}(R)$

симметрия, если $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$

$$\Lambda_{min} = \{ a - \lambda \bar{a} \mid a \in R \}$$
$$\Lambda_{max} = \{ a \in R \mid a = -\lambda \bar{a} \}$$

add. подгруппы, $\Lambda_{min} \leq \Lambda_{max}$

$$a \Lambda_{min} \bar{a} \leq \Lambda_{min}$$
$$a \Lambda_{max} \bar{a} \leq \Lambda_{max} \qquad \forall a \in R$$

form parameter:

$\Lambda \leq R$: add. подгруппа

1. $\Lambda_{min} \leq \Lambda \leq \Lambda_{max}$
2. $a \Lambda \bar{a} \leq \Lambda \quad \forall a \in R$

(R, Λ) – form ring

Morphism of form rings

$(R, \Lambda), (R', \Lambda')$ $\qquad$ гомоморфизм $\mu : R \longrightarrow R'$

$\lambda \qquad \lambda'$ $\qquad$ т.что $\mu(\bar{a}) = \overline{\mu(a)}$, $\mu(\lambda) = \lambda'$,

$\mu(\Lambda) \leq \Lambda'$

form ideal:

$I \trianglelefteq R$ и $\overline{I} = I$

$\Gamma_{min} = \langle x - \lambda\overline{x} \mid x \in I \rangle + \langle x\alpha\overline{x} \mid x \in I, \alpha \in \Lambda \rangle$

relative form param.

$\Gamma_{max} = I \cap \Lambda$

$\Gamma_{min}(I) \leq \Gamma_{max}(I)$

$\forall a \in R$: $a\Gamma_{min}\overline{a} \leq \Gamma_{min}$

$a\Gamma_{max}\overline{a} \leq \Gamma_{max}$

$\Gamma \leq I$ т.что $\Gamma_{min}(I) \leq \Gamma \leq \Gamma_{max}(I)$

add.подгруппа

и $a\Gamma\overline{a} \leq \Gamma$ $\forall a \in R$

(R, Λ) – form ring

V – right R-Module

$V \times V \longrightarrow R$

$f(ua, vb) = \overline{a} f(u,v) b$

$\forall u,v \in V$ $a, b \in R$

$h : V \times V \longrightarrow R$

$h(u,v) = f(u,v) + \lambda\overline{f(v,u)}$

$q : V \longrightarrow R/\Lambda$

$q(u) = f(u,u) + \Lambda$

$h(u,v) = \overline{h(v,u)} \cdot \lambda$

$\rightsquigarrow h$ – λ-эрмитова

q – квадр. форма

(V, h, q) – квадр. модуль над форм. кольцом

независимо от f

Def: $G(V, h, q)$

$\parallel$ – group of automorphisms of (V, h, q)

$$\{\sigma \in GL(V) \mid h(\sigma u, \sigma v) = h(u,v),\ q(\sigma v) = q(v)\ \forall u, v \in V\}$$

— унитарная группа Бака

Bak's unitary group.

(I, Γ) – form ideal в (R, Λ)

относительные:

$$G(V, h, q, I, \Gamma) = \{\sigma \in G(V,h,q) \mid \sigma \equiv 1 \pmod{I},\ f(\sigma v, \sigma v) - f(v,v) \in \Gamma,\ \forall v \in V\}$$

$\trianglelefteq G(V,h,q)$ если (V,h,q) – nonsingular

$\boxed{\text{Опр.}}$ $G(2n, R, \Lambda)$ – hyperbolic unitary group

$V = R^{2n}$ базис: $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-2}, e_{-1}$

$f : V \times V \longrightarrow R$ – полуторалин.

$$f(u,v) = \overline{u}_1 \cdot v_{-1} + \dots + \overline{u}_n \cdot v_{-n}$$