07.12.2009

Андрей Смоленский

Ограниченная порождаемость = конечная ширина групп Шевалле над кольцом целых алг. чисел. (Тавгень)

Φ — непр. прив. система корней

$\mathcal{O}$ — кольцо целых алг. чисел, σ — авт. Φ и $\mathcal{O}$

$\operatorname{rank}{}^{\sigma}\Phi \geq 2$, ${}^{\sigma}\Phi \neq {}^{2}A_{2n}$

$\Rightarrow {}^{\sigma}E(\Phi,\mathcal{O})$ — огр. порожд. отн. $X = \{x_A(t) \mid A \in {}^{\sigma}\Phi\}$

$$G(\Phi, R) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-alg}}(\mathbb{Z}[G], R)$$

$$\sigma(x_\alpha(t)) = x_{\sigma(\alpha)}(\pm\theta(t))$$

$$\mathcal{U}^\alpha(R) = \langle x_\alpha(t) \mid t \in R\rangle$$

$$G^\alpha(R) = \langle \mathcal{U}^\alpha(R), \mathcal{U}^{-\alpha}(R)\rangle$$

Φ^+, Φ^- $\quad U^{\pm}(\Phi^{\pm}, R) = \langle x_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi^{\pm}, t \in R\rangle$

$\Phi_1 \subseteq \Phi^+$ — замкнутое подмн-во

$$\alpha,\beta \in \Phi_1,\ \alpha+\beta \in \Phi \Rightarrow \alpha+\beta \in \Phi_1.$$

$$\mathcal{U}(\Phi_1, R) = \langle x_\alpha(t) \mid \alpha \in \Phi_1\rangle$$

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)\, x_{-\alpha}(-t^{-1})\, x_\alpha(t)$$

$$h_\alpha(t) = w_\alpha(t) \cdot w_\alpha(-1)$$

$N(R) = \langle w_\alpha(t)\rangle$ $\qquad N(R)/H(R) \cong W(\Phi)$

$H(R) = \langle h_\alpha(t)\rangle$

<u>Теорема</u> $\operatorname{rank}\Phi \geq m > 1$

$E(\Phi, R)$ — огр. порождается отн. $X \Leftarrow$ это верно при $\operatorname{rank}\Phi = m$

■ (1) $\exists N: E(\Phi, R) = \left(U^+(\Phi, R)\, ; U^-(\Phi, R)\right)^N = Y(\Phi)$

$\boxed{\text{Предл.}}$ $\forall \Phi_0 : \operatorname{rank}\Phi_0 = m$

$E(\Phi_0) = Y(\Phi) \Rightarrow \forall \Phi : \operatorname{rank}\Phi \geq m$

$$E(\Phi) = Y(\Phi)$$

□ $\operatorname{rank} \Phi > m$

(!) $\forall \alpha \quad x_\alpha(t) \cdot Y(\Phi) \subset Y(\Phi)$

Π – простые корни

$x_{\pm\alpha}(t), \quad \alpha \in \Pi$

① $\alpha \in \Pi \Longrightarrow x_\alpha(t) \cdot Y(\Phi) \subset Y(\Phi)$

т.к. $x_\alpha(t) \cdot U^+(\Phi) \subset U^+(\Phi)$

② $\alpha \notin \Pi, \ -\alpha \in \Pi$

$\exists \beta \in \Pi : \beta \neq -\alpha$, м. считать, что β – крайний в диаграмме Дынкина

$\Pi_1 = \Pi \setminus \{\beta\} \qquad |\Pi_1| \geq m \sim \Pi_1$ – базис Φ_1

Φ – неприв. $\qquad \Phi_1, \Phi_2 \qquad \Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$

замкнута $\qquad \Phi_1 \cap \Phi_2 = \varnothing$

Φ_1 и Φ_2^+ замкнуты

$$U(\Phi_1^+, R) \cdot U(\Phi_2^-, R) = U(\Phi_2^-, R) \cdot U(\Phi_1^+, R)$$

$$U(\Phi_1^-) \cdot U(\Phi_2^+) = U(\Phi_2^+) U(\Phi_1^-)$$

$$U^+(\Phi, R) = U(\Phi_2^+, R) \cdot U(\Phi_1^+, R)$$

$$Y(\Phi) = \left(U(\Phi_2^+) U(\Phi_2^-)\right)^N \cdot \left(U(\Phi_1^+) U(\Phi_1^-)\right)^N$$

$-\alpha \in \Phi_1^+ \qquad X_{-\alpha}(t) \in U(\Phi_1^+)$

$$x_\alpha(t) \cdot Y(\Phi) \subset \left(U(\Phi_2^+) U(\Phi_2^-)\right)^N \cdot$$

$$U(\Phi_1^-) \cdot \left(U(\Phi_1^+) U(\Phi_1^-)\right)^N$$

$U(\Phi_1^-) \cdot \left(U(\Phi_1^+) U(\Phi_1^-)\right)^N \subseteq \left(U(\Phi_1^+) U(\Phi_1^-)\right)^N$ по индукции.

$$\left(U(\Phi^+) U(\Phi^-)\right)^N = Y(\Phi)$$