

Универсальная локализация G — групповая схема Вебстера-Деназюра над K K — ^{ком.} кольцо, область целостности ($= \mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z}[1/2]$) Φ — система корней, $\Phi \neq A_1$

$$G(R) = \text{Hom}_{\text{каг}}(K[G], R)$$

$$h \mapsto h: K[G] \longrightarrow R$$

$$G(h): G(K[G]) \xrightarrow{g \mapsto h} G(R)$$

 $g \in G(K[G])$ соответствует $\text{id}: K[G] \longrightarrow K[G]$
— *generic element*

$$g = \text{id}_{K[G]}, \text{ и}$$

$$G(h)(g) = h$$

 e_K — единица

$$e_K: K[G] \longrightarrow K \quad \text{— задает единичный элемент } G(K)$$

 $I = \text{Ker}(e_K)$ — идеал augmentation

$$g \in G(K[G], I)$$

Если $h \in G(R, \mathfrak{J})$ для $\mathfrak{J} \triangleleft R$, то

$$\mathfrak{J} \subseteq h(I), \text{ и наоборот.}$$

 $s \in K[G] \rightsquigarrow g_s$ — образ g под действием канонического отображения

$$g_s: K[G] \longrightarrow \langle s \rangle^{-1} K[G] = K[G]_s$$

$$\uparrow \\ G(K[G]_s)$$

$$G(R, \mathfrak{J}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker}(G(R) \longrightarrow G(R/\mathfrak{J}))$$

$$E(\mathfrak{J}) = \langle x_\alpha(q) \mid \alpha \in \Phi, q \in \mathfrak{J} \rangle$$

$$E(R, \mathfrak{J}) = E(\mathfrak{J})^{E(R)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in E(R), b \in G(R) \end{array} \right.$$

 $\rightarrow [a, b] = \text{произведение } \ell \text{ экз. корней}$
элементов, где ℓ зависит от R , а зависит только от Φ
т.е. $[a, b] \in E^\ell(R)$

Идея: в качестве $\bar{v}$ брать универсальный элемент, тогда
 в $K[G] \exists s_1, \dots, s_j$: $\bar{v}_{s_k}$ имеет конечную ширину,
 унитарная строка $\in E^1(K[G]_{s_k})$

$$a = \prod a_k \text{ т.ч. } a_k \in G(R, s_k^m R)$$

почему здесь есть универсальный элемент?

$y = (y_{ik})$ — матрица

$e + ty \in G$ — удовлетворяет уравнениям

в кольце $K[y_{ik}, t]$

$K[y_{ik}, t]$ / ур-ны — предст. элемент

→ $\forall$ элемент контрпример — по группе $G(R, s^k R)$ — это

гомоморфизм из этого кольца в R

который t переводит в s^k .

т.е. гомоморфизм $K[t]$ — алгебр.

алгебра распределения — это

ассоциированная градуированная алгебра,
 с этим кольцом.

$$E(J), E(R, J)$$

Лемма ① $E(R, J) = \langle x_\alpha(q) x_\alpha(r) \mid q \in J, r \in R \rangle = Z_\alpha(q, r)$

② $E(R, J^3) \subseteq E(J)$

③ $R' \longrightarrow R \longrightarrow R' \quad J = \text{Ker}(R \longrightarrow R')$

Тогда $E(\bar{R}) \cap G(R, J) = E(R, J)$

$E^l(R)$ — мн-во всех произведений элементарных корневых унитарных элементов длины $\leq l$

$E^l(R, J)$ — мн-во всех произведений элементов $Z_\alpha(q, r)$ длины $\leq l$

§ 1, в котором мы доказываем нормальность элементарных, стандартные коммутационные формулы и оцениваем длину универсального корневого элемента

Универсальный корневой элемент

Лемма 1.1 $\exists \{s_w\}_{w \in W} \subseteq K[G]$ и $\dot{w} \in N(K[G]_{s_w})$ — прообраз $w \in W$
 $g_{s_w} \in \dot{w} U^-(K[G]_{s_w}) U^+(K[G]_{s_w})$ ~~($U^-(K[G]_{s_w}) U^+(K[G]_{s_w})$)~~

— это переформулировка того, что $W U^- U^+$ — открытое покрытие B ~~связи~~ ^{связи} ~~дольной~~ ^{дольной} клетки

Теорема R — K -алгебра, $r \in R$, $\alpha \in \Phi$, $h \in G(R)$

$\leadsto \exists \ell_2 \in \mathbb{N}$, зависящая только от Φ :

$$x_\alpha(r)^h \in E^{\ell_2}(R)$$

Д-во: $K[G][u, v] =: A$ — область целостности

$$a = x_\alpha(uv^3)^g \in G(A)$$

$\exists s \in K[G]$ т.ч. $g_s \in \dot{w} U^- U^+$

$$a = x_{w(\alpha)}(ts^k uv^3)^{cd}, \quad c \in U^-(A_s), d \in U^+(A_s)$$

где $t \in A^*$

$$a \in E(A_s, v^3 A_s) \subseteq E(v A_s) \text{ по Лемме}$$

$\leadsto$ можно специализировать $v \mapsto s^{3m}$

$$\leadsto x_\alpha(us^{3m})^g \in E(K[G][u])$$

s_w — набор элементов из Леммы 1.1.

Выберем m : ~~$x_\alpha(us_w^{3m})^g \in E(K[G][u])$~~ $x_\alpha(us_w^{3m})^g \in E(K[G][u]) \quad \forall w$

$$\leadsto 1 = \sum r_w s_w^{3m} \quad \int u \mapsto u \cdot r_w$$

$$x_\alpha(u)^g = \prod x_\alpha(u \cdot r_w \cdot s_w^{3m})^g \in E(K[G][u])$$

$$\leadsto \ell_2 = \text{length}(x_\alpha(u)^g)$$

$\leadsto$ специализируем $u \mapsto r$ $g \mapsto h$ получаем $x_\alpha(r)^h \in E^{\ell_2}(R)$ ■

Следствие $\exists l'_2, l''_2$: ① если $r \in \mathcal{Y}$, то $x_\alpha(r)^h \in E^{l'_2}(R, \mathcal{Y})$,

② если $h \in G(R, \mathcal{Y})$, то

$$[x_\alpha(r), h] \in E^{l''_2}(R, \mathcal{Y})$$

$$\square \quad x_\alpha(u)^g \in E(K[G][u]) \cap \underbrace{G(K[G][u], u \cdot K[G][u])}_{\text{гдро разраб.}} = \\ \uparrow \\ = E(K[G][u], u \cdot K[G][u])$$

$\exists l'_2$ - длина этого элемента в каких-то образующих.

Во втором случае

$$[x_\alpha(u), g] \in E(K[G][u]) \cap G(K[G][u], I[u]) = \\ = E(K[G][u], I[u])$$

$u \cdot l''_2$ - его длина...

Удал Баум: nearly affine group schemes:

можно рассмотреть гомоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \longrightarrow & R \\ \text{также, что } I' & \longrightarrow & A \\ & \swarrow & \downarrow \\ & & \text{аддитивные подгруппы} \end{array}$$

§2 Универсальное кольцо для
конгруэнц-подгруппы уровня nilpotent идеала.

Строим K -алгебру A ; $t \in A$, $f \in G(A; tA)$

свойство $\forall R, \forall r \in R \quad \forall h \in G(R, rR)$

не делитель нуля

$\exists!$ гомоморфизм $\varphi: A \longrightarrow R$ т.ч.
 $t \longmapsto r$

$$G(\varphi)(f) = h.$$

// регулярность нужна для единственности

Пусть $\pi: G \longrightarrow GL_n$ — точное представление

Напишем также $\pi: G \longrightarrow M_n$

$$\begin{array}{ccc}
 K[M_n] = K[z_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} & \xrightarrow{\quad} & K[t, y_{ij}] \\
 \downarrow \pi^* & \text{pushout} & \downarrow \\
 K[G] & \xrightarrow{\quad} & A' \\
 & & \downarrow h \\
 & & R
 \end{array}$$

$t \xrightarrow{\quad} t$
 $y_{ij} \xrightarrow{\quad} y_{ij}$
 $z_{ij} \xrightarrow{\quad} \delta_{ij} + t \cdot y_{ij}$

т.е. $A' = K[G] \otimes_{K[M_n]} K[t, y_{ij}]$

Но в этом поле t может быть делителем нуля.

$A = A' / \text{Ann}(t)$ — унив. поле

$\pi(h) - 1 = \pi \cdot h'$

$\leadsto (A, t, e + ty)$ — глобализует двойств.

$\Rightarrow$ оно универсальное $\leadsto$ единственное
и не зависит от представления.

План доказательства:

Лемма $h \in G(R, s^m R)$
 $d \in E^{\ell_3}(R_s)$

$\leadsto \exists m: [h, d] \in E^{\ell_3}(R)$
 зависит от d

$\exists \ell_3 \forall d \exists m \forall h$

~~$[a, g]$~~

$[a, g]$

$\left\{ \begin{array}{l} g_{sw} \in E^{\ell_1}(K[G]_{s_w}) \text{ с точностью до } w \\ a \in E(R) \\ \rightarrow a = \bigcup_w a_w, \text{ где } a_w \in G(B, s_w B) \end{array} \right.$

$\text{length}([a_{sw}, g]) \leadsto \text{length}([a_{sw}, g_{sw}])$

Гипотеза K_1 — сразу из леммы!

~~$S^k G(R) = A^{K_1}(G(p))$~~
 $\varphi: R \rightarrow R'$
 $\dim R'$