Подгруппы $Sp_{2n}(A)$, содержащие $Ep_{2n}(\mathbb{Z})$

А.В. Степанов
8.02.2010

$\boxed{\text{Теорема}}$ $n \geqslant 3$, Z — подкольцо B

$$Ep_{2n}(Z) \leqslant H \leqslant Sp_{2n}(B)$$

$\rightsquigarrow$ $\exists!$ форменное кольцо (R, Λ) такое, что

$$Ep_{2n}(R,\Lambda) \leqslant H \leqslant N_B(R,\Lambda) = N_{Sp_{2n}(B)}(Ep_{2n}(R,\Lambda))$$

т.е. $Z \subseteq R$ — подкольцо в B

$$1 \underset{2r^2}{\in} R^2 \subseteq \Lambda \subseteq R$$

R^2 — Z-модуль, порожденный r^2, $r \in R$, Λ — аддитивная подгруппа и Λ замкнуто отн-но умножения на квадраты эл-ов R:

$$r^2 \Lambda \leqslant \Lambda \quad \forall r \in R$$

$C_n = \Phi$ $\quad$ $\alpha \in \Phi_s \rightsquigarrow x_\alpha(r) = \begin{pmatrix} 1 & & r & \\ & \ddots & & \pm r \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $r \in R$

$\alpha \in \Phi_l \rightsquigarrow x_\alpha(r) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & r & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $r \in \Lambda$

(симплектич. — сохраняет форму $J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \iddots & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$)

2-обратима $\rightsquigarrow$ $R^2 = R = \Lambda$

$$Sp_{2n}(R,\Lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a^*c,\ d^*b \in M_n(\Lambda) \right\}$$

на побочной эл-ты Λ,

$$M_n(\Lambda) = \{ x \mid x^* = x,\ x_{i,n+1-i} \in \Lambda \}$$

$*$ — симметрия отн-но побочной диагонали

// см. http://alexei.stepanov.spb.ru

$Ep_{2n}(Z) \subseteq H$

$R_H = \{r \in B \mid x_\alpha(r) \in H, \alpha \in \Phi_s\}$

$\Lambda_H = \{r \in B \mid x_\alpha(r) \in H, \alpha \in \Phi_e\}$

Переформулировка теоремы:

$\forall h \in H \quad Ep_{2n}(R_H, \Lambda_H)^h \leq Ep_{2n}(R_H, \Lambda_H)$

<u>Лемма 1.1.</u>

$Ep_{2n}(R, \Lambda)^h \leq GL_{2n}(R)$

$\longrightarrow h_{ij} h_{kl} \in R \quad \forall i,j,k,l$

— это абс неприводимость

может быть, нужно в теореме писать GSp вместо Sp

<u>Лемма 1.2.</u>

$N_R(R, \Delta) = Sp_{2n}(R, \Delta) \cap SL_{2n}(R)$

<u>Лемма 1.3.</u> $[N_B(R, \Delta), N_B(R, \Lambda)] \subseteq Sp_{2n}(R, \Lambda)$

Известно, что $Ep_{2n}(R, \Delta)$ — максимальная совершенная в $Sp_{2n}(R, \Delta)$ (если R — нетерово)

<u>Предложение 1.4.</u> Если

$Ep_{2n}(R, \Lambda)^h \leq N_B(R, \Lambda)$,

то $h \in N_B(R, \Lambda)$

посмотрим на ситуацию $Z = \mathbb{Z}$, $B = A = \mathbb{Z}[Sp_{2n}] = \mathbb{Z}[g_{ij}]/\sim$

$H = \langle Ep_{2n}(\mathbb{Z}), g \rangle$ общая матрица

<u>Key Lemma</u>

$x_\alpha(g_{ij} g_{kl}) \in H \quad \forall i,j,k,l; \ \forall \alpha \in \Phi_s$

(это $\Leftrightarrow Ep_{2n}(R, R^2) \leq H \leq N_A(Ep_{2n}(R, R^2))$,)
где $R = \mathbb{Z}[g_{ij} g_{kl}]$

На самом деле $Ep_{2n}(R, R^2)^g \leq Ep_{2n}(R, R^2)$ — это равносильно Key Lemma

Лемма 2.1.

Из работы для обратимой двойки:

$$\underbrace{Ep_{2n}(R, 2R, (2R)^2)}_{\text{на коротких} \quad \text{на длинных}}{}^{g} \leq N_A(R, R^2)$$

норм. делитель, порожденный маленькими полупростыми

$$Ep_{2n}(R, I, \Gamma) = \left\langle x_\alpha(r) \,\middle|\, \begin{matrix} \alpha \in \Phi_s, r \in I \\ \alpha \in \Phi_\ell, r \in \Gamma \end{matrix} \right\rangle^{Ep_{2n}(R, \Lambda)}$$

$x_\alpha(2)$, $\alpha \in \Phi_s$ порождают как R-модуль ...

$$\cancel{\sum_{\alpha \in \Phi_s} R x_\alpha(2)} \supseteq M_{2n}(2^m R)$$

$$\sum R\, Ep_{2n}(R, 2R, 4R) \supseteq M_{2n}(2^m R)$$

$$\Rightarrow 2^m g_{ij} g_{k\ell} \in R \quad \forall i, j, k, \ell$$

Лемма 2.2

$$\overline{A} = A / 2^m A$$

$$\cup\!\!|$$

$$\overline{Z} = \mathbb{Z} / \mathbb{Z} \cap 2^m A$$

$$\| $$

$$2^m \mathbb{Z}$$

$\overline{g}$ – образ g в $Sp_{2n}(\overline{A})$

$\overline{g}: A \longrightarrow \overline{A}$ – канонические

$$\overline{H} = \langle Ep_{2n}(\overline{Z}), \overline{g} \rangle$$

Тогда $E(\overline{R}, \overline{R}^2) \leq \overline{H}$

Д-во Key Lemma

$$x_\alpha(\overline{g}_{ij}\overline{g}_{k\ell}) = \underbrace{\prod_p x_{\alpha_p}(\overline{z}_p) \cdot \overline{g}^{m_p}}_{H}$$

– сумм. степень по g_{ij} четна, из соотношений в A

$$\rightsquigarrow x_\alpha(g_{ij} g_{k\ell}) \in \prod_p x_{\alpha_p}(z_p) g^{m_p} \cdot Sp_{2n}(\underset{R}{A}, \underset{R}{2^m A})$$

$$Sp_{2n}(A, 2^m A) \cap Sp_{2n}(R) = Sp_{2n}(R, 2^m R)$$

$Sp \rightsquigarrow Ep$ при помощи коммутирования с трансвекцией

$\rightsquigarrow Ep_{2n}(R, 2^{3m} R) \subseteq Ep_{2n}(2^m R)$ – порожд. $\underset{\in H}{\underline{x_\alpha(2^m g_{i'j'} g_{k'\ell'})}}$