Борeвич – Вавилов

15.03.2010
Саша Семенов

Λ – асс. кольцо с 1 (R)

e_n – ед. матрица, $t_{ij}(\xi)$

Сеть идеалов

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \quad \sigma_{ij} \trianglelefteq \Lambda$$

— сеть идеалов порядка n в Λ, если $\sigma_{ij} \cdot \sigma_{jk} \subseteq \sigma_{ik}$

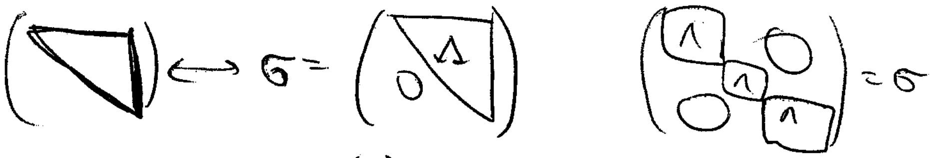
Если все $\sigma_{ii} = \Lambda \rightsquigarrow \sigma$ – D-сеть

$$M(\sigma) \leqslant M(n, \Lambda)$$
$$\| $$
$$\{a \in M(n,\Lambda) \mid a_{ij} \in \sigma_{ij}\}$$

$e \in M(\sigma) \Leftrightarrow \sigma$ — D-сеть

$e + M(\sigma)$ — мультипликативная система

$G(\sigma) = \cancel{GL \cap (e + M(\sigma))}$ $\{x \in GL \mid x, x^{-1} \in e + M(\sigma)\}$ — сетевая подгруппа, соответств. σ



σ: $\sigma_{ij} = I_0$ $\quad G(\sigma) = GL(n, \Lambda, I_0)$ – p.c.s. уровня I_0

$x \in GL$, $\quad x \in G(\sigma) \Leftrightarrow x, x^{-1} \in e + M(\sigma)$

Когда $(e + M(\sigma))^* \subset G(\sigma)$?

Теорема 1 $G(\sigma) = GL \cap (e + M(\sigma))$

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \forall I \quad M(n, \Lambda/I)$ – Dedekind finite

т.е. $\forall a \in M(n, \Lambda/I) \ \exists a' : aa' = 1 \Rightarrow a' = a^{-1}$

$\square$ Λ – к/п над центром (в т.ч. комм.)

$\Rightarrow M(n, \Lambda)$ – к/п. модуль над C

$\Rightarrow \forall a$ обр a^{-1} – многочлен от a с коэфф-ми C.

$\exists\, a \in e + M(\sigma)$ и a обратим $\Rightarrow a = e + \underset{M(\sigma)}{\overset{\cap}{b}}$

$\rightsquigarrow a^{-1} = \overset{\in C}{\xi} \cdot e + \underset{M(\sigma)}{\overset{\cap}{b'}}$ $\qquad a^{-1} - e = a^{-1}(e - a) = \xi \underbrace{(e-a)}_{\in M(\sigma)} + \underbrace{b'(e-a)}_{\in M(\sigma)} \in M(\sigma)$

σ, τ : $\sigma \leq \tau$, если $\sigma_{ij} \subseteq \tau_{ij}$

$\sigma \leq \tau \Leftrightarrow G(\sigma) \subset G(\tau)$

$E(\sigma) = \langle t_{ij}(\xi) \mid \xi \in \sigma_{ij} \rangle$ – элем. сетевая подгруппа

$\sigma_{ij} = I_0 \rightsquigarrow E(n, I_0)$

σ — D-сеть $\rightsquigarrow N(\sigma) = N_{GL}(G(\sigma))$

ν – отн. экв-сти на $I = \{1, \dots, n\}$

$I_1, \dots, I_m$ – массы экв-сти

$h(\nu) = \min_j |I_j|$

$\rightsquigarrow$ D-сеть: $[\nu]_{ij} = \begin{cases} \Lambda, & i \sim j \\ 0, & i \not\sim j \end{cases}$

$G([\nu])$ – блочно-диагональные матрицы

$\overset{\shortparallel}{G(\nu)}$ $\qquad E([\nu]) = E(\nu)$

σ — D-сеть ст. h

ν_σ – ОЭ : $i \underset{\sigma}{\sim} j \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \Lambda$

$G(\nu_\sigma) \subseteq G(\sigma)$

$E(\nu_\sigma) \subseteq E(\sigma)$

<u>Предложение</u>

σ — D-сеть, $\nu_\sigma \rightsquigarrow \begin{matrix} i \sim r \\ j \sim s \end{matrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{rs}$

□ $\sigma_{ij} = \sigma_{ij} \Lambda = \sigma_{ij} \sigma_{js} \subseteq \sigma_{is} = \Lambda \sigma_{is} = \Lambda \sigma_{ri} \sigma_{is} \subseteq \sigma_{rs}$ ■

$N(\sigma)$ $a \in GL$. Если $\forall i, j, r, s$

$a_{ir} \cdot \sigma_{rs} \cdot a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij} \Rightarrow a \in N(\sigma)$
$\qquad\qquad\Leftarrow ?$

$a \in N(\sigma)$ $\xi \in \sigma_{rs}$, $r \neq s$

$b = a \cdot t_{rs}(\xi) a^{-1} \rightsquigarrow b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir} \cdot \xi \cdot a'_{sj}$

$\in G(\sigma)$ $\qquad a_{ir} \cdot \xi \cdot a'_{sj} \in \sigma_{ij}$

$\boxed{\text{Пр. 2}}$ R — комм. с 1

$\langle \varepsilon - 1 \mid \varepsilon \in R^* \rangle$, σ — D-сеть

$\overset{\shortparallel}{R}$ $\longrightarrow$ там равносильно.

$$b = a \cdot d_r(\varepsilon) \cdot a^{-1} \qquad d_r(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \varepsilon & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir}(\varepsilon - 1) a'_{rj} \Rightarrow \text{ура.}$$

$\boxed{\text{Пр. 3}}$ Λ — кольцо, σ — D-сеть

$h(\sigma) = h(\nu_\sigma) \geq 2$

$$a \in N(\sigma) \Leftrightarrow \forall i, j, r, s \quad a_{ir} \cdot \sigma_{rs} \cdot a'_{sj} \subseteq \sigma_{ij}$$

$\square$ $r \in I$ $\quad h(\sigma) \geq 2 \rightsquigarrow \exists p \in I : p \sim r, p \neq r$

$\sigma_{rp} = \sigma_{pr} = \Lambda$

$$a_{ir} \cdot \sigma_{rr} \cdot a'_{rj} = a_{ir} \cdot \Lambda \cdot a'_{rj}$$

$$= a_{ir} \cdot \sigma_{rp} \cdot 1 \cdot \sigma_{pr} a'_{rj} =$$

$$= a_{ir} \cdot \sigma_{rp} \left(\sum_q a'_{pq} \cdot a_{qp} \right) \sigma_{pr} a'_{rj} \subseteq$$

$$\subseteq \sum_q \left(a_{ir} \cdot \sigma_{rp} a'_{pq} \cdot a_{qp} \cdot \sigma_{pr} \cdot a'_{rj} \right) \subseteq$$

$$\subseteq \sum_q \sigma_{iq} \sigma_{qj} \subseteq \sigma_{ij}$$

Λ — кольцо, ν — ОЭ на индексах I, $h(\nu) \geq 2$

$E(\nu) \leq H \leq GL(n, \Lambda)$

$i, j : \sigma_{ij} = \{ \xi \in \Lambda : t_{ij}(\xi) \in H \}$, $\sigma_{ii} = \Lambda$

— сеть, ассоциированная с H

$\boxed{\text{Лемма 1}}$ $a \in H$ $\quad$ p-ая строка $(0 \ldots \underset{(p)}{1} \ldots 0)$

$\Rightarrow \forall i \; \forall q \sim p, q \neq p \quad a_{iq} \in \sigma_{iq}$, т.е. $t_{iq}(a_{iq}) \in H$

$\square$ $\exists q \neq p$. $i \sim q \Rightarrow \sigma_{iq} = \Lambda \rightsquigarrow$ очевидно

$i \not\sim q$ $\exists r : r \not\sim i$ & $b = a \cdot t_{qp}(1) \cdot a^{-1}$ $\quad c = [b, t_{ri}(-1)]$

$$b = e + \sum_{s=1}^{n} a_{sq} \cdot e_{sp}$$

$c = t_{rp}(a_{iq}) \in H \rightsquigarrow a_{iq} \in \sigma_{rp} = \sigma_{iq}$

$r \sim i$, $p \sim q$ $\rightsquigarrow$

$\boxed{\text{Л2}}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (\text{— — —})$

$\boxed{\text{Л3}}$ $h(\nu) \geq 3$ q-ый столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}(q)$

$\Rightarrow a_{ip} \in \sigma_{ip} \quad \forall i \, \forall p \sim q$

$\boxed{\text{Т2}}$ R-комм. кольцо с 1, ν — ОЭ на I, $h(\nu) \geq 3$

$E(\nu) \leq H \leq GL(n, R) \Rightarrow \exists! \, \sigma$ — D-сеть:

$[\nu] \in \sigma \qquad E(\sigma) \leq H \leq N(\sigma)$

Д-во: $a \in H \quad a_{ir} \cdot \sigma_{rs} \cdot a'_{sj} \subset \sigma_{ij} \quad (r \neq s)$

$\exists \, r \neq s$ - fixed, $\xi \in \sigma_{rs} \quad b = a \cdot t_{rs}(\xi) \cdot a^{-1}$

$b_{ij} = \delta_{ij} + a_{ir} \xi \cdot a'_{sj} \overset{?}{\in} \sigma_{ij}$

$p \neq q \neq h \qquad c = b t_{hp}(a_{qr}) \cdot t_{hq}(-a_{pr}) \, b^{-1} \in H$

$c_{ip} = \delta_{ip} + b_{ih} a_{qr} \qquad c_{iq} = \delta_{iq} - b_{ih} \cdot a_{pr}$

$c_{ij} = \delta_{ij} \quad j \neq p \quad h \neq q$

$\xrightarrow{\text{Л.3}}$ $c_{ip} \in \sigma_{ip} \quad \forall i$

$c_{iq} \in \sigma_{iq} \quad \rightsquigarrow b_{ih} a_{qr} \in \sigma_{ih}$

$u = b \cdot t_{hp}(-b'_{qp}) \cdot t_{hq}(b_{pq}) \cdot b^{-1}$

$u_{ip} = \delta_{ip} \qquad u_{iq} = b_{ih}(1 - a_{pr} \cdot \xi \cdot a'_{sp}) - a_{qr} \xi a'_{sq})$

$\rightsquigarrow u_{iq} \in \sigma_{iq}$

$a = t_{ij}(\xi) \in N(\sigma) \Rightarrow \underset{\xi}{\underset{\shortparallel}{a_{ij}}} R \underset{1}{\underset{\shortparallel}{a'_{jj}}} \subseteq \sigma_{ij} \rightsquigarrow \xi \in \sigma_{ij}$

$\rightarrow t_{ij}(\xi) \in E(\sigma)$