29.03.2010
Настя

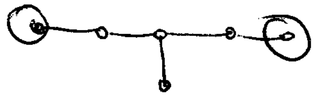
Диаграммы Дынкина и коневидные подгруппы (нерасщепимых) групп

G – (полу)простая алг. группа над полем k

$P \subseteq G$

$P^+ = P = P_{min}$ – мин. параболическая

индекс Титса – ее тип.



здесь

$P = P_{1,6}$

L – Леви типа D_4.

$+$ $*$-действие, $\Gamma \subseteq Aut(D)$

T – макс. тор в G

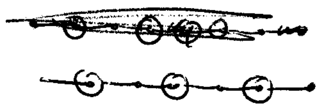
$S \subseteq T$ – макс. расщепимый тор

$X^*(T_{\bar{k}}) \longrightarrow X^*(S_{\bar{k}})$ – ограничение характеров

$\pi_S(\Phi) \setminus \{0\} = \Phi_S$ – относительная система корней

 $\Phi_S = A_2$

 $\Phi_S = BC_1$



центр. простая алгебра

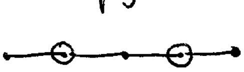
$SL_8(\bar{k}) \cong G_{\bar{k}}$, $G = SL_4(D)$

$\Phi = A_7$ $\quad \Phi_S = A_3$

$\underset{\substack{\wedge \\ \Phi}}{\alpha} \longmapsto \sum\limits_{\alpha_i \in \mathcal{Y}} m_{\alpha_i}(\alpha)\, \pi(\alpha_i)$ – внутр. тип.

π совпадает – внешний
→ коэффициенты суммарно

I „Подгруппы старшего корня"

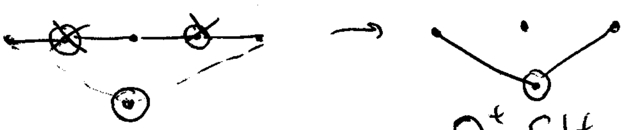
 $U = U_{P^+}$ (неабелев)

$U \supseteq [U, U] \supseteq [U, [U, U]] \supseteq \dots \supseteq \hat{U} \supseteq \{e\}$

$H = \langle L, \underset{\substack{\| \\ \hat{U}^+}}{\hat{U}}, \hat{U}^- \rangle$ – ред. группа

подгруппа старшего корня

В нашем случае



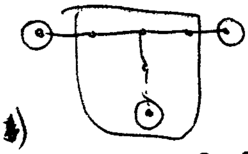
– тип H

$\tilde{D}$ – расш. д. Дынкина

$\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{Y} \cup (\tilde{D} \setminus D) \longrightarrow \tilde{D} \setminus \mathcal{Y}$ – тип H

$Q^+ \subseteq H$ – параболическая $= \langle L, \hat{U}^+ \rangle$

$Q^- = \langle L, \hat{U}^- \rangle$

Еще пример: 

Чем они полезны? Винберг в две классификации инд. Титса

$\boxed{\text{Lemma 3}}$ (PS)

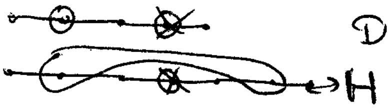
G – п/п. гр. над k, D – д. Дынкина, $J \subseteq D$, $\Gamma \leq Aut(D)$ т.ч. (D, J, Γ) – инд. Титса
$\Rightarrow$ любая Γ-орбита $O \subseteq \tilde{J}$ инвариантна отн-но $op_{(\tilde{D}\setminus\tilde{J})}$ – диагр. Дынкина

Опр. D – д. Дынкина; $op_D = i \circ w_0$ $\quad i: \Phi \longrightarrow \Phi$, $\alpha \longmapsto -\alpha$ $\quad w_0 \in W(\Phi)$ – наиб. длины, $w_0(\Phi^+) = \Phi^-$

A_ℓ: op нетривиален
D_ℓ: ℓ-неч. → нетрив.
ℓ-чет → трив.
E_6: нетрив.

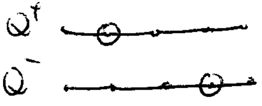
$\square$ $\exists\, G$ простая

① $O \subseteq J$ ⟶ $(\tilde{D}\setminus\tilde{J}) \cup O = (D\setminus J) \cup O = D'$



D' – тип $\langle L, \ldots$

$op_{D'}(O)$ – тип. Q^-

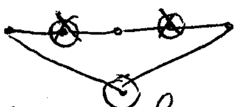


Q^+ – парб. подгр. типа O в H
Q^- – аналогично
Q^+ – мин. параб. в H ⟶ $w_0 Q^- w_0^{-1} = Q^+$

$w_0 Q^- w_0^{-1}$ – „стандартная" параб. подгруппа

Q^+ — точно инд. Титса быть
Q^- — не может

② $O = \tilde{J}\setminus J$
$D' = (D\setminus J) \cup O$ – тип „подгруппы max корня"



$Q^+ = \langle L, \hat{U} \rangle$
$Q^- = \langle L, \hat{U}^- \rangle$

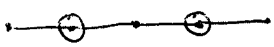
Следствие Инд. Титса удовл. этому условию

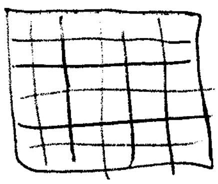
Опр. Комбинаторный индекс (Титса)
D – д.Д., $J \subseteq D$, $\Gamma \subseteq Aut(D)$; тройка (D, J, Γ) – к.и., если она удовл. заключению Леммы

Упр. Док., что если $\Phi = A_\ell$, то комб. индексы = инд. Титса

Лишние: ① E_6, $J = \{2\}$, $\Gamma = 1$ ② E_7, $J = \{1, 3\}$, ③ F_4, $J = \{1\}, \{1, 4\}$, ④ G_2: $J = \{2\}$.

II Максимальные расщепимые подгруппы – „скелеты"

 $\Phi_s = \Phi_e = A_2$



D	D	D
D	D	D
D	D	D

$\cup$

k	k	k
k	k	k
k	k	k

$Cent(D) = k$

SL_3 - расщ.

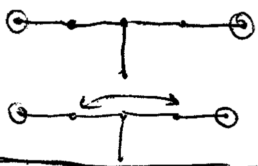
T. (Бореля – Титса) 1965

$\exists\, G$ – п/п алг.группа над k,
S – max расщ. тор.
$\Phi_s' = \{\alpha \in \Phi_s \mid 2\alpha \notin \Phi_s\}$
Δ – сист. простых корней в Φ_s'
$\forall \alpha \in \Delta$ фикс. $V_\alpha \leq U_{(\alpha)} = X_\alpha$ – ад. группа

1-мерная, $\cong G_a$, инв. отн-но действия S

модули Кебане

$\Rightarrow \exists\, H \leq G$ – связная п/п расщепимая подгруппа т.ч. $H \geq \langle S; V_\alpha, \alpha \in \Delta \rangle$,
S – макс. тор в H, тип H равен Φ_s'
V_α – корневая, соотв. простому корню.



$G \geq SL_3(k)$

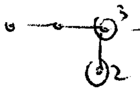
$BC_1 \rightsquigarrow SL_2(k)$

⟶ a. Steinbach „Some twisted variants of Chevalley groups", 2005

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ Такие подгруппы м. построить по $\forall$ комб. индексу
$\forall$ лок. нотой

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Liebeck – Seitz), 2004 –
$\exists\, G$ – простая алг. гр. над $\bar{k}$, – искл. типа

X – max. связная замкнутая ⟶ X бывает
$\boxed{\text{I}}$ параболическая $\boxed{\text{II}}$ п/п max ранга – Бореля-де Зибенталя $\boxed{\text{III}}$ некоторые в E_6: F_4, $A_2 G_2$; в E_7: $A_1 F_4$, $G_2 C_3$; в E_8: $G_2 F_4$ $\boxed{\text{IV}}$ подгр. небольш. ранга (типа A_1, например) в нек. характеристиках



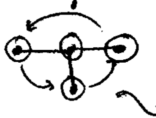
⟶ H – типа G_2

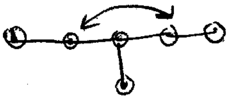
III

→ SL_3 – A_2

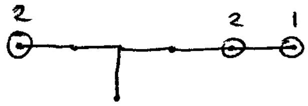
$^3D_4$ или $^6D_4$ → A_2G_2

→ G_2





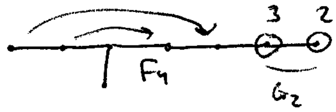
F_4



C_3

G_2F_4

$\boxed{\text{сюрприз!}}$



F_4, G_2

Они сопряжены!

$\boxed{\text{Упр.}}$ Найти пары в E_6 и E_7 и предъявить сопряжение! в E_6, E_7, E_8.

$\boxed{\text{Бредовая мысль}}$ max подгр. маленького ранга

A_1 – в $G_2,\ p\geq 7$ — Σ коэфф. при ст. корне = ч. Коксетера − 1

$F_4,\ p\geq 13$ — 5

построены Testermann – $E_7,\ p\geq 17$ — 11

$p\geq 19$ – 2 класса — 17

$E_8,\ p\geq 23, 29, 31$ — 29

<u>Теорема</u> (Джекобсон, 1960...)

$\exists$ G – простая алг. группа над k типа

$\Rightarrow G(k)=E(k)$

$E(k) = \langle U^+(k), U^-(k)\rangle$

$\square$

H – подгр. с корнями — имеет тип B_4

$\rightsquigarrow \cancel{SO_9(k)/C(SO_9(k))}$ – проста.

$H(k)\leq EH(k)$ (для $Spin_9$) — по Дьедонне.

$EH(k)=\langle [U,U](k), [U^-,U^-](k)\rangle$

$\wedge|$

$E(k)$

$H(k)\leq E(k)$

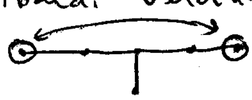
подгр. Леви в H

$G(k)=\langle L(k), \underbrace{U^+(k), U^-(k)}_{\subseteq E(k)}\rangle$

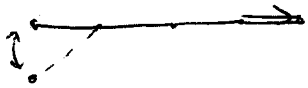
отрезали константу (типа B_3)

$\rightsquigarrow L(k)\leq EH(k)\leq E(k)$. $\blacksquare$

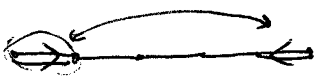
$\boxed{\text{Упр.}^*}$ Воспроизвести результат Garibaldi–Veldkamp, 2007 для



Д-ть, что фактор абелев! хотя бы.

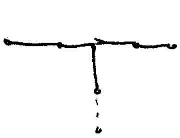


$^2D_l\subseteq B_l$



$^2A_{l-1}\subseteq C_l$

$^2E_6\subseteq E_7$



$^3D_4\subseteq E_6$