Найти!

Quillen – Higher K-Theory – книга (Seattle, III том)

$\boxed{26.04.2010}$

Числа Гурвица

Н. А. Вавилов

Вопрос 1

$\pi \in S_n$. Сколькими способами π можно представить как произведение m транспозиций?

$$m \geq decr(\pi), \quad m \equiv \underset{n-\text{кол-во циклов}}{\underset{\parallel}{decr(\pi)}} \equiv inv(\pi) \pmod 2$$

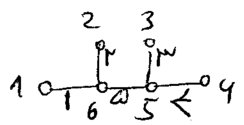
Вопрос 2 $\pi \in S_n$, ...

$$m \geq l(\pi) = inv(\pi)$$ – фундаментальных транспозиций

$\boxed{\text{Теорема}}$ $l(w) = n(w)$
$$\underset{|\Phi^- \cap w(\Phi^+)|}{\parallel}$$

наим. m т.ч. $w = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_m}$
$s_1, \ldots, s_l$ – фунд. отражения

Уже числа Гурвица для случая $\pi = (1\,2 \ldots n)$, $m = n-1$: количество представлений = теорема Кэли о перечислении (всех) деревьев



~~(16)(26)(35)~~(

(56)(45)(35)(26)(16)

длинных циклов $(n-1)!$

$\to n^{n-2}$ $\left(\frac{\cdot (n-1)! \cdot n!}{(n-1)!}, \text{видно} \right)$

Задача То же самое для всех конечных групп Коксетера
2) фунд. отражения
1) Все корневые отражения

Классы сопряженности группы Вейля
– R. Carter, Conj

Аналог длинного цикла – элемент Коксетера

$s_1 \cdot \ldots \cdot s_l$ – выбираем $\coprod$ и нумерацию,
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ – $\forall$ нумерация

на 90% классы сопр-сти $W(\Phi)$ – элементы Коксетера подсистем корней

Теорема Коксетера Все эл-ты Коксетера сопряжены

$$\begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta \subset \Phi \to c(\Delta) \in W(\Delta) \leq W(\Phi)$$

Есть ровно 2 исключения: $\Delta \not\sim \Delta'$, но $C(\Delta) \sim C(\Delta')$

$$C(B_2+2A_1) = C(A_3+A_1) \text{ в } F_4$$
$$C(D_5+A_3) = C(A_7+A_1) \text{ в } E_8.$$

Кроме того, есть нек. кол-во <u>больших</u> классов.

1) Вычислить кол-во таких представлений
2) В чем комб. смысл полученных чисел?

II Подсистемы корней

$\Delta \subseteq \Phi$

• Классифицировать Δ.

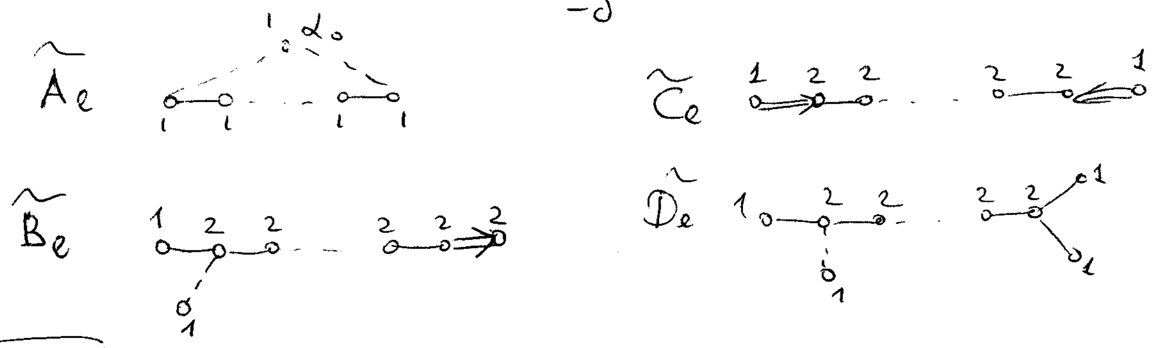
$$G(\Delta, R) \hookrightarrow G(\Phi, R) \quad \text{(регулярное вложение)}$$

п/п подгруппы, кот. нормализуются max тором всей группы. (subsystem subgroups)

1949 — Borel – de Siebental
1952 — Дынкин (с ошибками - испр. у Карпелевича)

1) Взять $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, выбросить 1 корень. и <u>породить</u> оставшимся подсистему.

2) Взять $\widetilde{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_0\}$ и выбросить корень с меткой $\underline{\geq 1}$ и породить оставшимися подсистему; $\alpha_0 = -\delta$



$\boxed{\text{Теорема}}$ ① Все подсистемы max ранга получаются итерацией 2) для каждой связной компоненты диагр. Дынкина систем, полученных на предыд. шаге

② $\forall$ подсистема является параболической подсистемой какой-то подсистемы max ранга

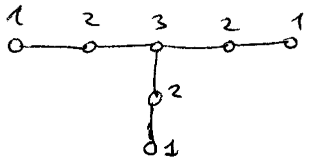
$\Delta \subset \Phi$ — max, если $\cancel{\nexists}$ не $\exists\, \Sigma$: $\Delta \subsetneq \Sigma \subsetneq \Phi$ подсистема

не $\exists\, S$: $\Delta \subsetneq S \subsetneq \Phi$ замкнутое мн-во корней

S – <u>замкнуто</u>, если $\alpha, \beta \in S$, $\alpha+\beta \in \Phi \Rightarrow \alpha+\beta \in S$

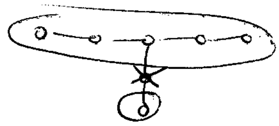
③ Подсистема max ранга и максимальна ⟺ она получается выбрасыванием одного корня в Π с простой меткой (простое число!)

E_6



Выброси 2:

$A_5 + A_1 \subseteq E_6$

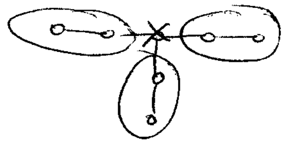


Выброси 3:

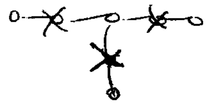
ранга 6

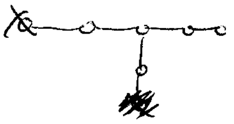
$3A_2 \subseteq E_6$

$\overset{\shortparallel}{A_2 + A_2 + A_2}$

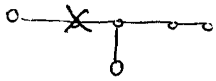


$4A_1 \subseteq E_6$





D_5

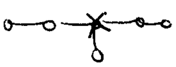


$A_4 + A_1$

Для E_6, E_7, E_8 – нарисовать явный список

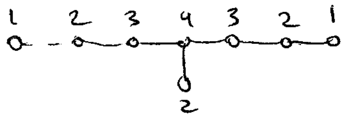
A_5

см. Hanebor, Vavilov!



$2A_2 + A_1$

E_7

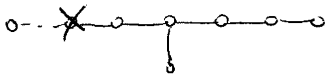


$A_7 \subseteq E_7$

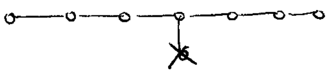
$\downarrow$

E_7,

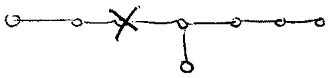
$D_6 + A_1$



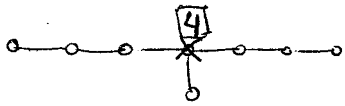
A_7



$A_5 + A_2$

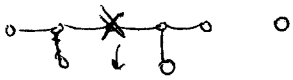


$2A_3 + A_1$



$\subseteq D_6 + A_1$

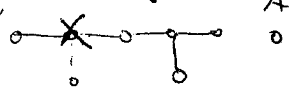
$D_6 \quad + \quad A_1$



$A_3 + A_3$

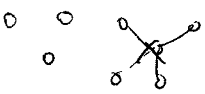
$D_6 \qquad A_1$

$D_4 + 3A_1 \hookleftarrow$

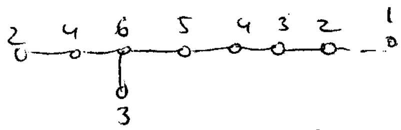


$\Downarrow$

$7A_1 \hookleftarrow$



E_8



E_8

$D_8 \qquad 240 = 112 + \overset{2^7}{\overset{\shortparallel}{128}}$

$A_8 \qquad 240 = 72 + \underset{C_9^3}{\underset{\shortparallel}{168}}$

$A_7 + A_1 \subseteq E_7 + A_1$

$A_5 + A_2 + A_1 \subseteq E_6 + A_2$

$2A_4$

$D_5 + A_3 \subseteq D_8$

$E_6 + A_2$

$E_7 + A_1$

$2D_4$

$4A_2$

$8A_1 \ldots$

Все ли подсистемы одного типа сопряжены?

— Почти.

1) Разные длины корней $\Rightarrow$ вложение A на короткие корни $\leftrightarrow \tilde{A}_\ell$

и на длинные корни $\leftrightarrow A_\ell$

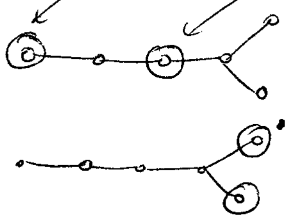
$A_1+\tilde{A}_1 \subseteq G_2$

$A_2+\tilde{A}_2 \subseteq F_4$

2) $D_2 \simeq 2A_1$

$D_3 \simeq A_3$

$\pm(e_1-e_2)$ $\pm(e_3-e_4)$



$2A_1$

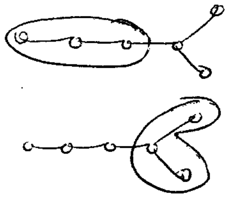
$\wr$

D_2

$\pm(e_{\ell-1}-e_\ell)$

$\pm(e_{\ell-1}+e_\ell)$

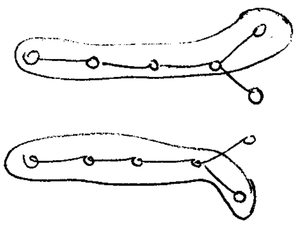
> не сопряжены



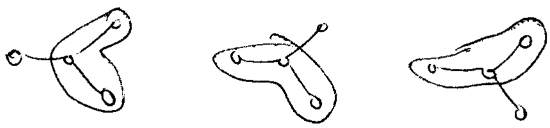
A_3

D_3

3) A_ℓ', A_ℓ'' в $D_{\ell+1}$



> не сопряжены, если ℓ нечетно.



4) $D_8 \leq E_8$ $\leadsto A_7$ все еще не сопряжены в E_7, E_8

$D_6+A_1 \leq E_7$ $\leadsto A_5$

$W(\Phi)$ $\quad \Delta \subseteq \Phi$

$W(\Delta)$ $\quad X(\Delta)=\{w\in W(\Phi) \mid w\Delta=\Delta\}$

$\quad\quad \geqslant W(\Delta)$

$\Delta\sim\Delta' \Leftrightarrow \exists w\in W(\Phi)$

$w\Delta=\Delta'$

$\Leftrightarrow wW(\Delta)w^{-1}=W(\Delta')$

т.к. $w w_\alpha w^{-1} = w_{w\alpha}$

$\quad \| $

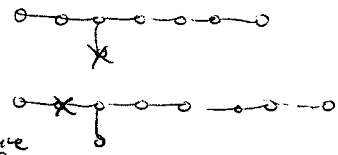
w_{w_α}

За счет чего $X(\Delta) > W(\Delta)$?

① $\Delta + \Delta^{\perp} \subseteq \Phi$

$$X(\Delta) \geq W(\Delta) \times W(\Delta^{\perp})$$

Ортогонали — разные для несопряженных!



② В $W(\Phi)$ могут реализовываться какие-то внешние автоморфизмы Δ.

$|X(\Delta)|$ — см. Carter

$X(\Delta) / W(\Delta)\times W(\Delta^{\perp}) = ?$ Howlett, Deriziotis - параб.
Zdown - Morris - F_4...
Вав. - Харебов - все

* В E_7 $X(D_6 + A_1) = W(D_6 + A_1)$

В E_8 $X(D_8) = W(D_8)$

В E_7 $\boxed{\text{не сопряжены}}$

В E_8 A_7', A_7''

$(A_5 + A_1)', (A_5 + A_1)''$

$(2A_3)', (2A_3)''$

$(A_3 + 2A_1)', (A_3 + 2A_1)''$

$(4A_1)', (4A_1)''$

В E_7 $(A_5 + A_1)', (A_5 + A_1)''$

$(A_3 + 2A_1)', (A_3 + 2A_1)''$

$(A_3 + A_1)', (A_3 + A_1)''$

$(4A_1)', (4A_1)''$

$(3A_1)', (3A_1)''$

В E_6 исключений нет!

$|X(D_4) : W(D_4)| = 6$

уже в F_4

Δ - неприводима $\Rightarrow$ $W(\Delta)$ действует транзитивно на парах од. длины.

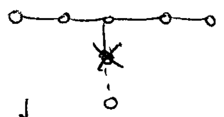
$(\alpha,\beta)=0$ $\quad$ $2A_1$

иначе $\quad$ A_2

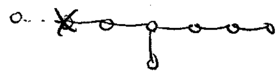
~~A_4~~ 12

Почему все $2A_1$ сопряжены? (кроме D_l)

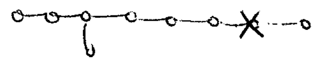
$A_1^\perp = ?$



$A_1^\perp = A_5$

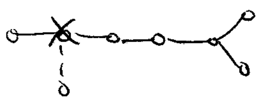


$A_1^\perp = D_6$



$A_1^\perp = E_7$

В D_l:



$A_1^\perp = A_1 + D_{l-2}$