03.05.2010

Н.А.В.

Описание надгрупп, порождённых частью T и какими-то X_α.

$$T = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \qquad X_\alpha = \{x_\alpha(\xi),\ \xi \in R\}$$

$$T \cdot \underbrace{\langle X_\alpha,\ \alpha \in \Phi^+ \rangle}_{\parallel \atop U} = \underset{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}}{\overset{\parallel}{B}} \quad \text{— борелевская подгруппа}$$

$B = T \rightthreetimes U$ — унипотентный радикал

$\parallel$

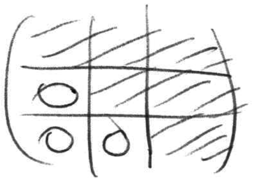
$B(\Phi, R)$

<u>Вопрос</u> Как устроены надгруппы

$$B(\Phi, R) \le H \le G(\Phi, R) \ ?$$

1. Для поля это $\underbrace{\text{параболические}}_{\text{стандартные}}$ подгруппы:

Теорема Титса (1962)



$GL(n, k) \sim 2^{n-1}$

группы с BN-парой

2. Над кольцом больше содержащих B!

$$\begin{pmatrix} R & R \\ A & R \end{pmatrix}, \quad A \trianglelefteq R. \quad \text{Хватает ли такого типа?}$$

3. $GL(n, R)$ R — полулокально (или $sr(R) = 1$) и ещё какие-то условия на R^*

$\to$ ответ <u>да</u>

$$\begin{pmatrix} R & & R \\ A_{21} & \ddots & \\ A_{n,1} & A_{n,n-1} & R \end{pmatrix}$$

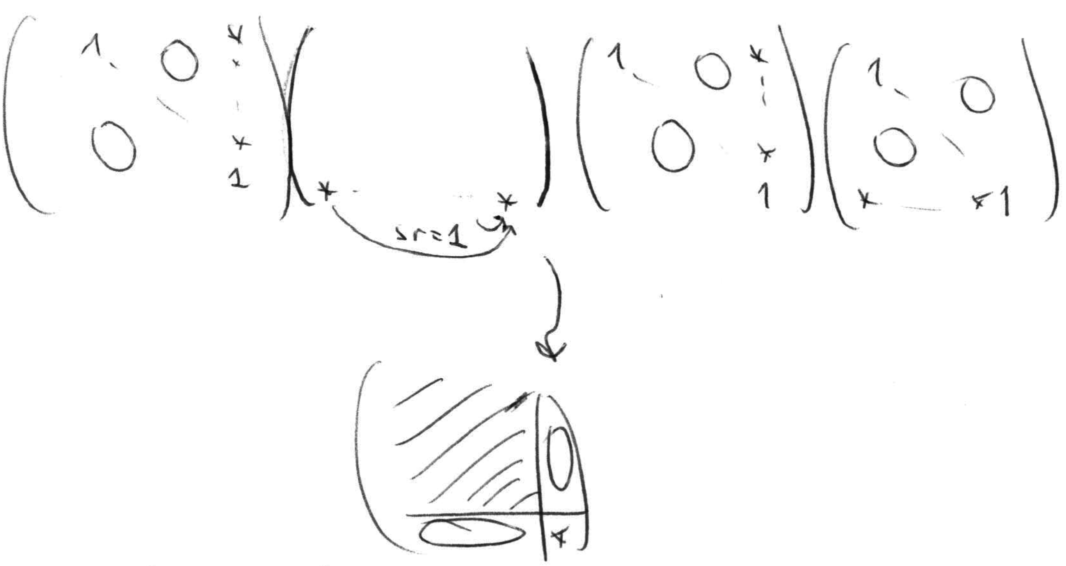
<u>В общем случае нет шансов</u>

Для поля — разложение Брюа

Для 0-мерного кольца — разл. Гаусса

$$G(\Phi, R) = B(\Phi, R)\, U^-(\Phi, R)\, U(\Phi, R)$$

Stein, Abe 1973



<u>Задача</u> Д-ть разложение Гаусса при естеств. условии стабильности

(например, для фч группы — $\Lambda sr(R, 0)$ Басса)

Д-но для полулок. колец.

K. Suzuki — Вавилов $\cong 1978$

③ $\dim(R) \geq 1$ $\xrightarrow{\text{таких}}$ разложений нет и быть не может (нет конечности ширины)

т. Басса $sr(R) \leq \underset{\dim(\mathrm{Spec}(R))}{\underset{\shortparallel}{\dim(R)}} + 1$

На самом деле $sr(R) \leq \underset{\dim(\mathrm{Max}(R))}{\underset{\shortparallel}{j\text{-}\dim(R)}} + 1$

и даже $sr(R) \leq \delta(R) + 1$

Например, ~~dim(R) ≥ 1~~

$K[X]$, R-дедекиндово $\Rightarrow$ ничего такого, вообще говоря, нет.

Но для колец $\dim(R) = 1$ <u>иногда</u> есть.

R-дедекиндово арифм. типа
- числовые
- функциональные

$K/\mathbb{Q}$ — конечно $\to \mathcal{O}_K$ — кольцо целых в K
числовое поле

$v(K)$ — точки $\mathcal{O}_K$ $\quad v(K)_{fin} \sqcup v(K)_\infty$
valuation

$K = \mathbb{Q}$ → по т. Островского

$|\ |_\infty$, $|\ |_p$

r – число вещ. влож. K

s – половина числа компл. вложений K

$\Rightarrow |K : \mathbb{Q}| = r+2s$, $|v(K)_\infty| = r+s$

$S \subseteq v(K)$, содержащее $v(K)_\infty$

$|S| < \infty$

$R = \mathcal{O}_{K,S} = \{x \in K \mid v_p(x) \geq 0,\ p \notin S\}$

→ R – дедекиндово кольцо арифм. типа

Функциональн.: $\mathbb{F}_q(x)$

$K \mid \mathbb{F}_q(x)$ – кон. расширение

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\forall$ идеала $I \trianglelefteq R$, $I \neq 0$ $|R/I| < \infty$

(*) Т. Дирихле о единицах

$\boxed{\text{Лемма}}$ (следствие T). Если $R \neq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$ $(d>0)$, то R^* бесконечно и содержит элемент бесконечного порядка

Мы хотим д-ть след. альтернативу: — основная в док-ве.

R – дедек. кольцо арифм. типа (= область Хассе)

т.ч. $|R^*| = \infty$ и $B(\Phi, R) \leq H \leq G(\Phi, R)$

$\Rightarrow$ (1) либо H маленькая: $H \leq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$,

(2) либо H большая: $\exists I \trianglelefteq R$, $I \neq 0$:

H содержит $E(\Phi, R, I)$

Почти полож. решение конгруэнц-проблемы

Басс – Милнор – Серр 1968

Мацумото 1969

$\Rightarrow K_1(\Phi, R, I) = G(\Phi, R, I) / E(\Phi, R, I)$ конечен

Вав. 1982 $\Rightarrow$ мы знаем подгруппы, возникающие в (2)

(а возн. в (1) мы знаем по индукции

$x=(x_{ij})\in H\le GL(n,R)$

— доп. для SL_n и Sp_{2l}
SL: Вав. 1977
Sp: Александров-Вав., 2010

Если $x_{ij}\ne 0$, $i>j$, то

$t_{ij}(\underset{\ne 0}{*})\in H$

Что происходит для $GL(n,R)$?

Идея Серра из статьи про конгруэнц-проблему для SL_2 — Ann. Math, 1971?

- стабилизатор столбца при помощи $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\quad b=0 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b\ne 0 \rightsquigarrow |R/bR|<\infty$

и в R есть единица беск. порядка $\theta\in R^*$

$\rightsquigarrow \exists m: \theta^m\equiv 1 \pmod b$

$\theta^m a\equiv a \pmod b$ $\quad \overset{?}{=} a$ $\quad \exists c\in R:$

$$\begin{pmatrix} \theta^m\ne 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta^m a+cb \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Задача: сделать то же самое для других групп, начиная с SO.

Подзадача 1 — стабилизировать столбец

Подзадача 2 — $H\le G(\Phi,R)\curvearrowright V\cong R^n$

H неприводима как подгр в G,

т.е. H не содержится в собственных параболических

$\rightarrow$ H неприводима в $GL(n,R)$, т.е.

$\exists g\in H: g_{n1}\ne 0$

или даже

Вав., 1982

R полн., блоки ≥3 (тогда были: ≥2)

R — ∀, блоки > sr(R)

Задача: то же для всех групп Шевалле (пока только для GL)