Надгруппы subsystem subgroups

10.05.2010
Н.А.В.

$$E(\Delta,R)\leqslant\dots\leqslant G(\Phi,R)$$

$\Delta\subseteq\Phi$ — но нужно брать большую подсистему.

Что такое большая подсистема?

1) $\Delta^\perp=\emptyset$; если $\Delta^\perp\neq\emptyset$, то задача включает в себя описание всех подгрупп в $SL(2,R)$

(точнее, в $G(\Delta^\perp,R)$)

$=E(n,R)$

Задача: $$\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}\leqslant\dots\leqslant GL(n,R)\qquad 3\leqslant m<n-1$$

$m=n/2$ → нормализатор $=$ $N_G\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}$

$$N_G\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\cup\begin{pmatrix}0 & *\\ * & 0\end{pmatrix}$$

A_7' и A_7'' в E_8

2) $[E(\Delta,R),E(\Delta,R)]=E(\Delta,R)$

Без этого условия а) для произвольных комм. колец не сделаем

б) в тех случаях, когда сделаем, ответ другой, более сложный

Хочется сделать для произв. комм. кольца R

Два основных метода:

1) разложение трансвекций (что-то типа)
— попадать в собственные параболические подгруппы

2) какой-то вариант локализации

Надгруппы subsystem subgroups при этих предположениях

($\Delta^\perp=\emptyset$, $E(\Delta,R)$ совершенна, иногда $2\in R^*$)

$\Phi=A_l$ $\qquad A_{l_1}+\dots+A_{l_t}$

1) $\Delta^\perp=\emptyset\iff(l_1+1)+\dots+(l_t+1)=l+1$, $l_i\geqslant 1$

2) $l_i\geqslant 2$

$$\begin{pmatrix}* & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}\leqslant\dots\leqslant G(A_l,R)=SL(l+1,R)$$

Как выглядит ответ?

~~Понятно, если $2\in R^*$~~

и

$(E(k,R)\oplus E(m,R))$

$k,m\geqslant 3$

$A, B \trianglelefteq R$

$E\left(\begin{array}{c|c} /\!/\!/ & A \\ \hline B & /\!/\!/ \end{array}\right) \rightsquigarrow E(A,B) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi\in R,\ i\sim j;\ \xi\in A,\ i\le k<j;\ \xi\in B,\ j\le k<i \rangle$

<u>Теорема</u> R-коммутативно, $k, m \geq 3$

$\rightsquigarrow \forall H$:

$E(k,R)\oplus E(m,R) \leq H \leq GL(k+m,R)$

$\exists!$ идеалы $A, B \trianglelefteq R$ такие, что — Боревич -- Вавилов

$E(A,B) \leq H \leq N_G(E(A,B))$ 1983/84?

1979

$ab-ba=0$ — можно

Дедекиндово: $\forall a,b\ \exists \alpha,\beta$: $\alpha b-\beta a=0$ и $\gcd(\alpha,\beta)=1$

нётерова обл. целостности, в которой если есть ЛЗ, то есть и унимодулярная ЛЗ.

$k=m=2$

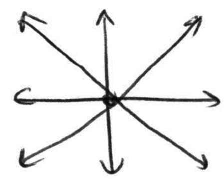
$E(2,R)\oplus E(2,R) \leq \ldots \leq SL(4,R)$ $A_1+A_1 \leq A_3$

~~$A_1\oplus A_1$~~

$Sp(4,R)$

и куча сопряжённых к ним.

C_2



$$\begin{pmatrix} 1 & & & \cdot \\ & 1 & \cdot & \\ & \cdot & 1 & \\ \cdot & & & 1 \end{pmatrix}$$

$R=K$ — поле $\rightsquigarrow$ Койбаев

— можно ссылаться на т. о порождении —

aka теоремы типа Машарина

Тиммесфельд, А. Штейнбах, Г. Кюйперс

Для других расщепимых клас. групп

Вавилов, 1987, гл. V (докт. дисс.)

1988 ДАН

1990 труды МИАН

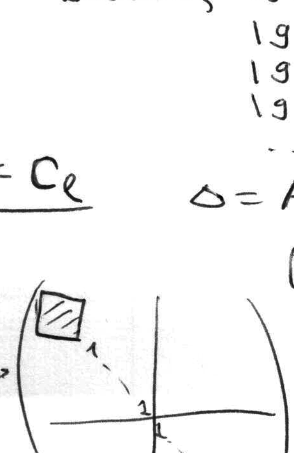
1988 Сиб. мат. журнал — нужно для SO

...

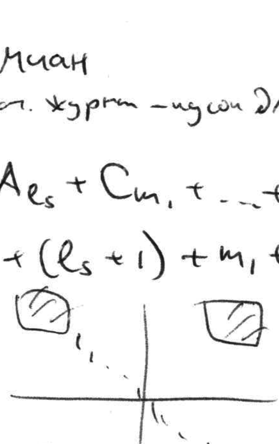
<u>$\Phi = C_l$</u> $\Delta = A_{l_1}+\ldots+A_{l_s}+C_{m_1}+\ldots+C_{m_t}$

$(l_1+1)+\ldots+(l_s+1)+m_1+\ldots+m_t = l$

A_m



C_n



Теорема Такое же описание надгрупп в $Sp(2l, R)$, сод. $E(\sigma, R)$ в предп. 1) $2 \in R^*$, 2) $l_i, m_j \ge 2$

// если $2 \notin R^*$, возникают форм. параметры $\left(\begin{array}{c|c} & A / B \\ \hline & \end{array}\right)$ $\quad A_{(2)} \subseteq B \subseteq A$, $\quad A_{(2)} = 2A + A^2$

Для орт. группы:

Теорема

$\Phi = D_l \to \Delta = A_{l_1} + \dots + A_{l_s} + D_{m_1} + \dots + D_{m_t}$

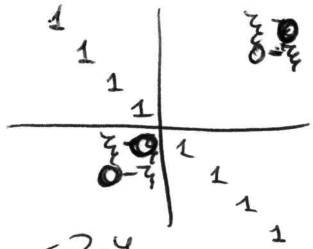
— и обр-сть 2 не нужна — то же само

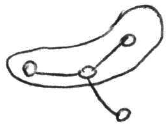
$\Phi = B_l \to$ (— // — // — // — // $+ B_m$)

Такое же описание надгрупп в $SO(n, R)$, сод. $E(\sigma, R)$ в предп. 1) $2 \in R^*$ 2) $m_i \ge 3$, $l_i \ge 4$

нужно только для B?

$$\left(\begin{array}{c|c} g & 0 \\ \hline 0 & f g^{-t} f \end{array}\right)$$

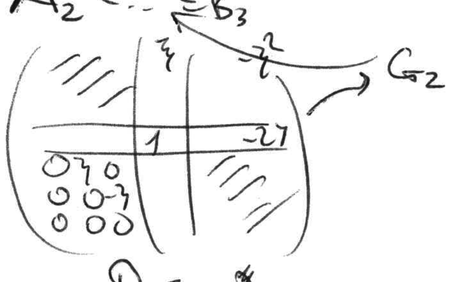




$(D_4, \omega_1) - 8 = 2 \cdot 4 \qquad (B_3, \omega_1) - 7$

$(B_3, \omega_3) - 8 = 2^3$ $\quad \boxed{2l = 2^{l-1}}$ $\quad$ → там есть $Spin(7)$

$A_2 \subseteq \dots \subseteq B_3$



проект

Задача Д-ть аналогичные рез-ты для $GU(n, R, \Lambda)$, сняв условие на обратимость 2.

— но хотя бы для больших рангов непр. слагаемых

Хотим для исключительных

– не разобрали ни одного примера

$A_7 \leq E_7$ $A_5 + A_1 \leq E_6$

$3A_2 \leq E_6$

$D_8 \leq E_8$ — единообразно

1) уровни

2) нормализаторы

(4) вложение в нормализатор

3) извлечение корневых унипотентов из перех. подгрупп

но для дедекинд колец это легче — задача

На самом деле для дедекиндовых колец получается такой результат:

$$E(\Delta, R) \leq \dots \leq G(\Phi, K)$$

Ф. Арамеля – для GL 1987