31.05.2010
С.Ю. Рыбаков

Абелевы многообразия над конечными полями

$K = \mathbb{F}_q$, $\operatorname{char} K = p$

Абелево многообразие A = алгебраическая группа + проективное многообразие

$A \xrightarrow{\varphi} B$ — изогения, если φ — sur. и конечной степени $\deg \varphi$
гомоморфизм алг. групп.

Пример — Фробениус

$$F : A \longrightarrow A, \quad \deg F = q$$ — нас этот интересует

Утв. $f_A(t) = \deg(t - F)$, $t \in \mathbb{Z}$ — многочлен (Вейля) $\in \mathbb{Z}[t]$

$$t - F : a \longmapsto ta - Fa$$

$X \longrightarrow X$ — тожд. на точках

$f \longmapsto f^q$ — на функциях

Теорема (Тейта)

A и B изогенны над K $\Longleftrightarrow f_A = f_B$

Замечание 1) A и B изогенны — отн-е экв-сти

2) мн-во многочленов Вейля „хорошо" описано

Пример $A(K)$ — группа точек, абелева, конечна.

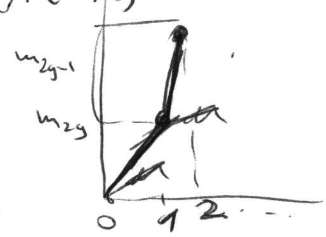
Вопрос — как она устроена? где A пробегает класс изогении

$$A(K) = \bigoplus_{\ell\text{-прост.}} A(k)_\ell \qquad A(k)_\ell = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}/\ell^{m_i}\mathbb{Z}, \quad g = \dim A$$

$$m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_{2g} \geq 0$$

Опр. Многоугольник Ходжа $H_p(A(k)_\ell)$

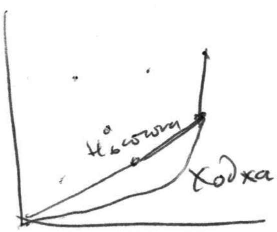
Вершины $\left(i, \sum_{j=2g+1-i}^{2g} m_j\right)$



$$f(t) = f_A(1-t) = \sum_{i=0}^{2g} a_i t^i$$

Опр. многоугольник Ньютона $N_p(f)$

$(i, \operatorname{ord}_\ell a_i)$ — выпуклая оболочка этих точек



$\boxed{\text{Теорема}}$

Пусть у f_A нет кратных корней,

G — аб. группа порядка $f_A(1)$

$\Rightarrow \begin{cases} G = B(k),\ B \text{ изогенна } A \\ \Updownarrow \\ H_p(G) \prec N(f_A(1-t)) \end{cases}$

„не выше"

$T \subseteq V = \mathbb{Q}_\ell[t] / f(t)\, \mathbb{Q}_\ell[t]$

векторное пр-во с оператором E умножения на t

E-инвариантная решетка

$\boxed{\text{Утв.}}$ Если у f_A нет кратных корней, то $V \simeq T_\ell(A) \otimes \mathbb{Q}_\ell \ni F-1 = E$

$$T_\ell(A) / (F-1) T_\ell A \cong A(k)_\ell$$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Модуль Тейта

$[\ell^n] : A \longrightarrow A$

$A_n = \ker [\ell^n](k)$

$\boxed{\text{Утв.}}$ (Т. Вейля) $A_n \simeq (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})^{2g}$ + действие Фробениуса

$A_{n-1} \longleftarrow A_n \xleftarrow{\ell} A_{n+1} \longleftarrow A_{n+2}$ — мульт. система

модуль Тейта:

1) $T_\ell(A) = \varprojlim_n A_n$ — своб. модуль над $\mathbb{Z}_\ell$ ранга $2g$
2) + действие Фробениуса на $T_\ell(A)$ полупросто.
3) $f_A(t) = \det(t - F)$ на $T_\ell A$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\exists$ решетка $T \subseteq V$ $G \cong T/ET$ $\Leftrightarrow H_p(G) \prec N_p(f)$

$A[\ell] = \ker[\ell] : A \longrightarrow A$

$A[\ell](k) = T_\ell A / \ell T_\ell A \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{2g} = \mathbb{F}_\ell^{2g}$

Вопрос: как устроена $A[\ell]$, где A пробегает класс изоген.

ℓ-простое число, $\ell \neq \operatorname{char} k$

ответ известен, если у f нет кратных корней или если $\dim A \leq 2$

$f \in \mathbb{Z}_\ell[t]$, $\deg f = d$

N — матрица Фробениуса, $N \in \operatorname{Mat}_{d\times d} \mathbb{F}_\ell$

$\det(t - N) \equiv f(t) \bmod \ell$

Вопрос: $\exists$ ли M над $\mathbb{Z}_\ell$ такая, что

1) $M \equiv N(\ell)$
2) $\det(t - M) = f(t)$

Редукция $N^d = 0$

$\Rightarrow f(t) \equiv t^d \ (\ell)$

Если бы N диаг над $\overline{\mathbb{F}_q}$ $\rightsquigarrow$ $N = N_d + N_n$

N_d — диаг, N_n — нильп.

$N_d = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots)$

$M_d = \mathrm{diag}(\tilde\lambda_1, \dots, \tilde\lambda_1, \tilde\lambda_2, \dots, \tilde\lambda_2, \dots)$

$M_n = M - M_d = \bigoplus M^{(i)}$

$f^{(i)}(M_n^{(i)}) = 0$

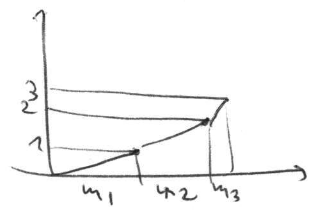
$f(t) = \prod f^{(i)}(t - \tilde\lambda_i)$

Теперь у N есть жорд. форма:

размеры клеток $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_r$ — однозначно задают матрицу

Опр. многоугольник Юнга $Y_\ell(N)$

$\left(\sum_{j=1}^{s} m_j, s\right)$



$\boxed{\text{Теорема}}$

$\exists$ матрица $M \iff Y_\ell(N) < N_\ell(f)$

хотим: $M \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{Z}_\ell)$ $\circlearrowleft GL_d(\mathbb{Z}_\ell)$

$M \longmapsto$
- $\det(t - M)$
- $H_\ell(M - \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_\ell$
- $M = \bigoplus (M_d^{(i)} + M_n^{(i)})$ $\rightsquigarrow Y_\ell(M_n^{(i)} \bmod \ell)$

Общая орбита M: $\det(t - M)$ ~~минимален~~

---

char $K \neq 2$

Поверхность Шимуры S

$S \longrightarrow A$ / алг-на

разрешение особенностей

$N_d = |S(\mathbb{F}_{q^d})|$

$Z_S(t) = \exp\left(-\sum \frac{N_d t^d}{d}\right)$

$Z_S(t)$ — рац. функция

$$Z_S(t) = \frac{P_1(t)\, P_1(qt)}{(1-t)\, P_2(t)\, (1-q^2 t)}$$

Упр. S — пов. Шимуры $\Rightarrow P_1(t) = 1$

$$Z_A(t) = \frac{P_1(A,t)\, P_1(A,t)}{(1-t)\, P_2(A,t)\, (1-q^2 t)}$$

$$P_2(t) = P_2(A,t) \prod_{a \in A[2]} \left(1 - (qt)^{\deg a}\right)^{\pm 1}$$

$$P_1(A,t) = t^{2\dim A} f_A(q/t)$$