31.05.2011

Алгебра инвариантов унитреугольной группы

$k$ - алг, $\mathrm{char}\, k = 0$

$G = SL_n(k),\ O_{2n+1}(k),\ Sp_{2n}(k),\ O_{2n}(k).$

$U_m(k) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}\right\}$ $\qquad m = n, 2n+1, 2n$

$B_m(k) = \left\{\begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ & & *\end{pmatrix}\right\}$

$N = U_m(k) \cap G$

$B = B_m(k) \cap G$

$B \subset P \subset G \quad \mathfrak{p} = \mathrm{Lie}\, P,\ \mathfrak{b} = \mathrm{Lie}\, B,\ \mathfrak{n} = \mathrm{Lie}\, N$

$\mathfrak{p} = \left\{\begin{pmatrix} \boxed{*} & & *\mathfrak{m} \\ & \boxed{*} & \\ 0 & & \boxed{*}\end{pmatrix}\right\}$ $\mathfrak{r}$

$\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}$

$P \curvearrowright \mathfrak{m}: \forall g \in P, x \in \mathfrak{m} \qquad g \cdot x = g x g^{-1}$

$\exists$ открытая орбита (Ричардсона)

$P \curvearrowright k[\mathfrak{m}] \quad \forall g \in P, f \in k[\mathfrak{m}] \quad g \cdot f(x) = f(g^{-1} x g)$

$\to k[\mathfrak{m}]^P = k$

Задача: описать какие-нибудь орбиты

$N \curvearrowright \mathfrak{m},\quad k[\mathfrak{m}]^N,\ k(\mathfrak{m})^N$

$T$ - max тор, $\Delta^+$ - пол. система корней

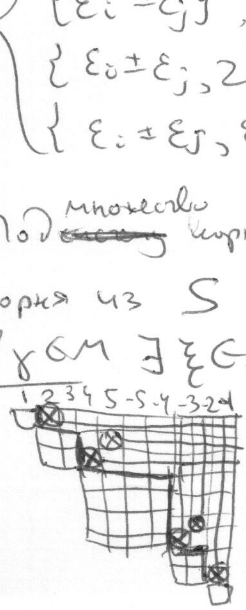
$\Delta^+ = \begin{cases} \{\varepsilon_i - \varepsilon_j\},\ SL_n \\ \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j\},\ O_{2n} \\ \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 2\varepsilon_i\}\ Sp_{2n} \\ \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, \varepsilon_i\}\ O_{2n+1}\end{cases}$

$M \subset \Delta^+$

$\gamma \in M \iff \mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{m}$

$\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta^+$ сравнимы, если $\gamma_1 - \gamma_2 \in \Delta^+$ или $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Delta^+$

$\boxed{\text{Опр.}}$: Подмножество корней $S$ в $M$ будем называть базой, если $\forall$ 2 корня из $S$ не сравнимы и $\forall \gamma \in M\ \exists \xi \in S : \gamma - \xi \in \Delta^+$

$O_{10}$, 

$\varepsilon_i - \varepsilon_j \longmapsto (-j, -i)$

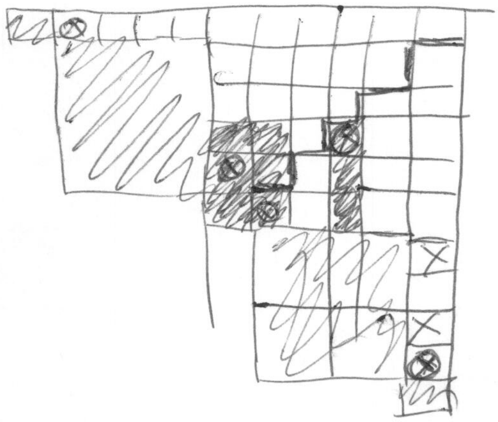
$\varepsilon_i + \varepsilon_j \longmapsto (j, -i)$

$2\varepsilon_i \longmapsto (i, -i)$

$\varepsilon_i \longmapsto (0, -i)$

$\xi \in S \longmapsto M_{\xi}$

$O_{11}$ : 1, 4, 1, 4, 1



$\boxed{\text{Опр.}}$ $\xi_1, \xi_2 \in S$ — <u>допустимая пара</u>, если $\exists\, \alpha \in \Delta^+_{\Gamma}$ :

// $\xi_1 + \alpha$, $\xi_2 + \alpha$ — корни

$\xi_1 \rightsquigarrow (a, b)$ $\qquad \alpha \rightsquigarrow (b, c)$

$\xi_2 \rightsquigarrow (c, d)$

или $\xi_1 \rightsquigarrow (a, b)$, $\xi_2 \rightsquigarrow (a', b')$ > правее центрального блока

и $\exists\, \alpha \rightsquigarrow (-a, a')$, и $\alpha \in \Gamma_{\Gamma} = \begin{cases} \Delta^+ \cup \{2\varepsilon_i\}, & G \neq SL_n, Sp_{2n} \\ \Delta^+ \setminus \{2\varepsilon_i\}, & G = Sp_{2n} \\ \Delta^+, & G = SL_n \end{cases}$

по доп. паре $\alpha$ построим (с корнем $\alpha$)

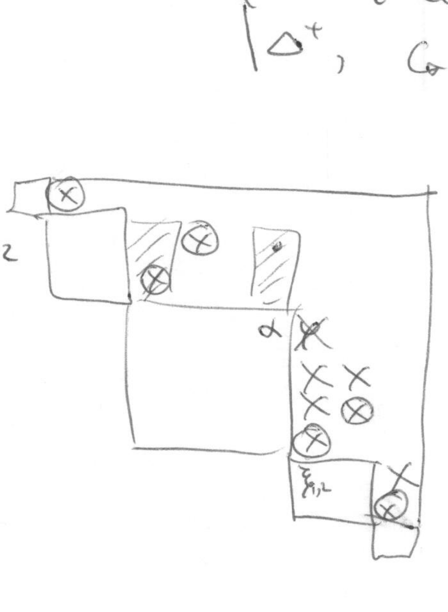
$a < a'$

$\xi_1 \rightsquigarrow (a, b)$

$\xi_2 \rightsquigarrow (a', b')$

$\varphi := \alpha + \xi_2$

$\Phi = \{\varphi\}$



по $\varphi$ построим инвариант

$$L_{\varphi} = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma_{\Gamma} \cup \{0\} \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} M_{\xi_1 + \alpha_1} \overline{M}_{\alpha_2 + \xi_2}$$

Теорема: многочлены, построенные по множествам $S$ и $\Phi$ ($M_{\xi}$ и $L_{\varphi}$) являются алгебраически независимыми инвариантами.

$S \cup \Phi$ — обобщённая база

$$\mathcal{Y} = \Big\{ \sum_{\xi \in S \cup \Phi} c_\xi E_\xi \Big\}$$

$$E_\xi = \begin{cases} E_{ij} - E_{-j,-i} & \xi = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \ G \neq SL_n \\ E_{ij}, & \xi = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \ G = SL_n \\ \vdots & \end{cases}$$

положительн. базис Шевалле

$\boxed{\text{Th. 2}}$ (теорема для $A_n$, гипотеза для $B_n, C_n$)

$\exists$ непустое открытое подмн-во $\mathcal{U}$ в $\mathfrak{m}$

$$\forall x \in \mathcal{U} \quad \exists g \in N \quad g x g^{-1} \in \mathcal{Y}$$

$\boxed{\text{Th. 3}}$ $k[\mathfrak{m}]^N = k[M_\xi^{\pm 1}, L_\varphi] \cap k[\mathfrak{m}]$

$\boxed{\text{Th. 4}}$ $k(\mathfrak{m})^N = k(M_\xi, L_\varphi)$

$\boxed{\text{Th. 5}}$ Максимальная размерность $N$-орбиты

$$= \dim \mathfrak{m} - |S| - |\Phi|$$

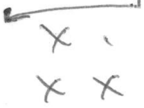
$\boxed{\text{Th. 6}}$ $\Omega$ — $N$-орбита макс. размерности

$\Rightarrow \Omega$ задается $M_\xi = c_\xi \neq 0$

$L_\varphi = c_\varphi \neq 0$

---

$B = P \rightsquigarrow k[\mathfrak{m}]^N = k[\mathfrak{n}]^N = k[x_{12}, x_{23}, \dots, x_{n-1,n}]$

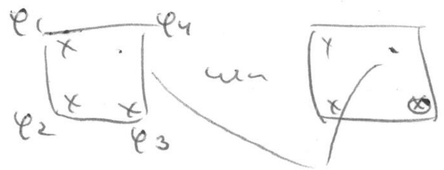
$\boxed{\text{Th}}$ Пусть в соотв. $\mathcal{P}$ диаграмме нигде нет  или 

Тогда алгебра инвариантов

$$k[\mathfrak{m}]^N = k[M_\xi, L_\varphi]$$

Если такие картинки есть, то

$k[\mathfrak{m}]^N$ не является свободной

Пусть есть  или

тут много тоже крестики:

$\varphi_1 = (i_1, j_1)$

$\varphi_2 = (i_2, j_1)$

$\varphi_3 = (i_2, j_2)$

Лемма: Для $A_n$ $\varphi_4 \in \Phi$

$$L_{\varphi_4} = \begin{cases} L_{\varphi_4}, & \text{если } \varphi_4 \in \Phi \\ L_{\varphi_2}, & \text{если } \varphi_4 \notin \Phi \text{ и } G \neq Sp_{2n} \end{cases}$$

// нет инварианта, если $G = Sp_{2n}$

① пусть $\nexists \varphi \sim (i, j_1) : i_1 < i < i_2, \varphi \in \Phi$ (*) — нет крестика

$$A_{i_1}^{j_1 j_2} = \frac{L_{\varphi_1} L_{\varphi_3} - L_{\varphi_2} L_{\varphi_4}}{M_{\xi_1}},$$ где $(\xi_1, \xi_2)$ — доп. пара, соотв. $\varphi_1$ и $\xi_1$ стоит ниже $\xi_2$

② $\nexists \varphi \sim (i_2, j) : j_1 < j < j_2, \varphi \in \Phi$ (**)

$$B_{i_1, i_2}^{j_1} = \frac{L_{\varphi_1} L_{\varphi_3} - L_{\varphi_2} L_{\varphi_4}}{M_{\xi_2}}$$

③ ни там, ни там нет крестика: (*) и (**)

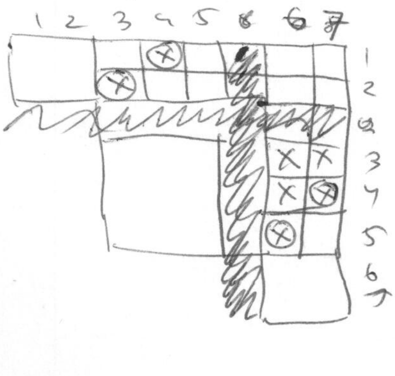
$$C_{i_1}^{j_1} = \frac{L_{\varphi_1} L_{\varphi_3} - L_{\varphi_2} L_{\varphi_4}}{M_{\xi_1} M_{\xi_2}}$$

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ $M_{\xi}, L_{\varphi}, A_{i_1}^{j_1 j_2}, B_{i_1, i_2}^{j_1}, C_{i_1}^{j_1}$ — образующие $k[\mathfrak{m}]^N$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $A_i^{j_1, j_2}, B_{i_1, i_2}^{j_1}, C_{i_1}^{j_1} \in k[\mathfrak{m}]^N$ (опубликовано для $A_n$)

$A_n$

$(2, 3, 2)$



$\to M_2^6 (X^2) = L_{\varepsilon_3 - \varepsilon_6}$

$C = M_{12}^{67} (X^2)$

$L_{\varepsilon_3 - \varepsilon_7}$ — составной минор $(2 \times 2)$ из стол из $X$, из стол из $X^2$