7.12.2011

Н. А. Вавилов

$G = G(\Phi, R) \curvearrowright V = V(\varpi)$

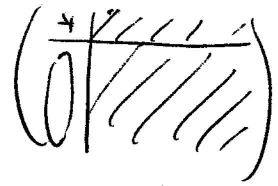
V^{λ}, $\lambda \in \Lambda(\pi)$

попасть в собственную параболическую подгруппу:

$E(\Phi, R)$ (или даже $U(\Phi, R)$)

$g \in G$ $\qquad \in \qquad g^{-1} \qquad \varpi = \varpi_i$

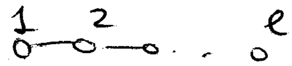
$$\Big(\quad\Big)\Big(\quad\Big)\Big(\quad\Big) \in P_i$$

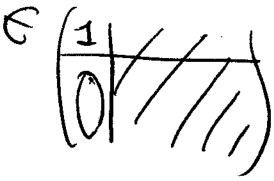
$P_i =$ 

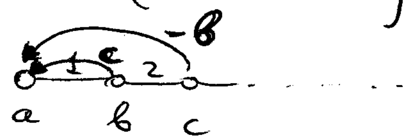
Примеры: стабилизация одного столбца

① (A_l, ϖ_1), $l \geq 2$

$$\begin{pmatrix} & g & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c & -b & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & & g^{-1} \\ b & & \\ c & & \\ \vdots & & \\ & & \end{pmatrix} \in$$



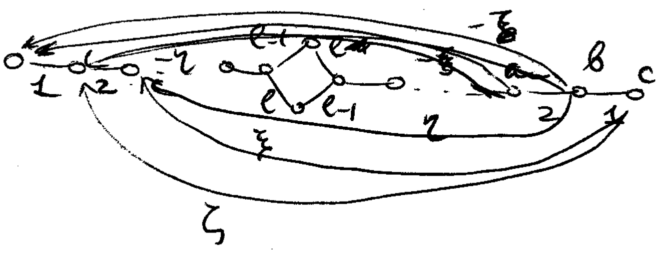




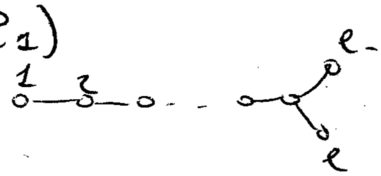
(A_2, P_1) - доказательство

② (D_l, ϖ_1), $l \geq 3$

(B_l, ϖ_1)



(D_3, P_1)



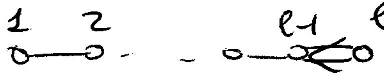
$\xi = b$

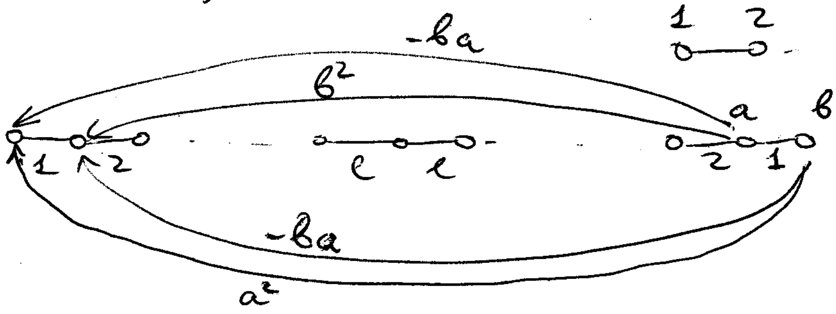
$\eta = -c$

$\zeta = -a$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b & -a & 0 \\ & 1 & & -c & 0 & a \\ & & 1 & 0 & c & -b \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline a & \\ b & \\ c & \end{array}\right)$$

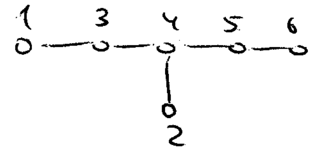
③ (C_ℓ, ϖ_1), $\ell \geq 2$ $\qquad (C_2, P_1)$

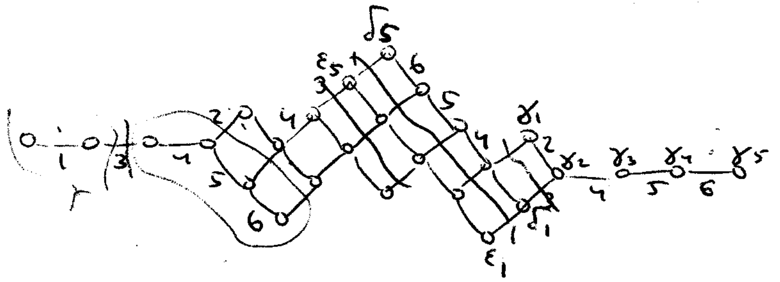




$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & -ba & a^2 \\ & 1 & b^2 & -ba \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline a & \\ b & \end{array}\right)$$

④ (E_6, ϖ_1)





(A_5, P_1)

$A_5 \subseteq E_6$

$5 \times 6 = 30 = 10 \times 2 + 2 \times 5$

$$u_{\gamma_1} u_{\delta_1} - u_{\gamma_2} u_{\delta_2} + u_{\gamma_3} u_{\delta_3} - u_{\gamma_4} u_{\delta_4} + u_{\gamma_5} u_{\delta_5} = 0$$

$\beta_1 = \begin{smallmatrix} 1&2&3&2&1 \\ &&2&& \end{smallmatrix}$

$\beta_2 = \begin{smallmatrix} 1&2&3&2&1 \\ &&1&& \end{smallmatrix}$

$\beta_3 = \begin{smallmatrix} 1&2&2&2&1 \\ &&1&& \end{smallmatrix}$

$\beta_4 = \begin{smallmatrix} 1&2&2&1&1 \\ &&1&& \end{smallmatrix}$

$\beta_5 = \begin{smallmatrix} 1&2&2&1&0 \\ &&1&& \end{smallmatrix}$

⑤ (E_7, ϖ_7)

⑥ (E_6, ϖ_2) $\quad D_5$ — присоединенное представления

(E_7, ϖ_1) $\quad D_6$

(E_8, ϖ_8) $\quad D_8$

A_2-доказательство

① в D_ℓ, $\ell \geq 3$, было D_3-доказательство

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & * & * & 0 \\ & 1 & & * & 0 & * \\ & & 1 & 0 & * & * \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

A_2-доказательство

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & * & * & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & * \\ & & & & 1 & * \\ & & & & & 1 \end{array}\right)$$

Стабилизация столбцов в несколько шагов

Мы брали $g \in G(\Phi, R) \curvearrowright V$

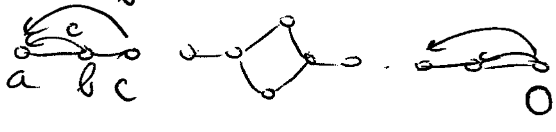
$[g, x_\alpha(1)]$ — хотя бы один из них нецентральный, если g нецентрален (тождество Холла-Витта + совершенность E)

$x_\alpha(1) = e + e_\alpha$, e_α — корневой элемент алгебры Ли

$g(e+e_\alpha)g^{-1}(e-e_\alpha)$

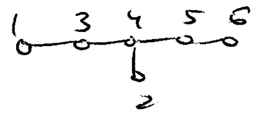
$=(e+\underbrace{ge_\alpha g^{-1}}_{\sum_{\beta\in\Phi} \ldots e_\beta + \sum_{i=1}^{\ell} \ldots h_{\alpha_i}})(e-e_\alpha)$ и испортит не более двух мест

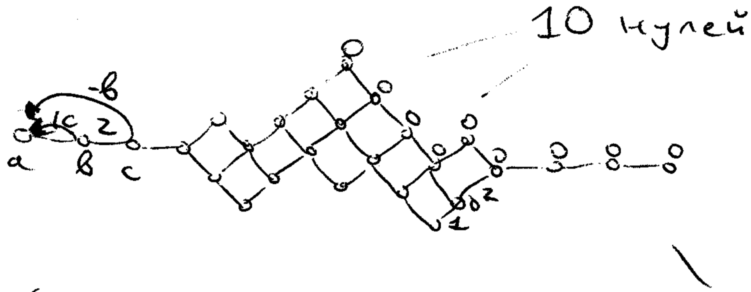
имеет вид $\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & 0 \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

1-ый столбец такой матрицы. 

② (E_6, ϖ_1)

$$g \rightsquigarrow [g, x_\alpha(1)]$$





(E_7, ϖ_7) — микровесовое — 2004, Вавилов–Гаврилович

$(F_4$, ограничение (E_6, ϖ_1) на $F_4)$

Новые методы: свободы гораздо больше

Stepanov–Vavilov, K-Theory, 2000

$cf-ed$, $af+be$, $ad-bc$ ~ соотношения Плюккера

$$g\begin{pmatrix}1&*&*&*\\&1&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\cdot\\a&b\\c&d\\e&f\end{pmatrix}g^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&\\0&0&\end{pmatrix}$$

$A_l,\ l \geq 3$

(A_3, P_1) — доказательство

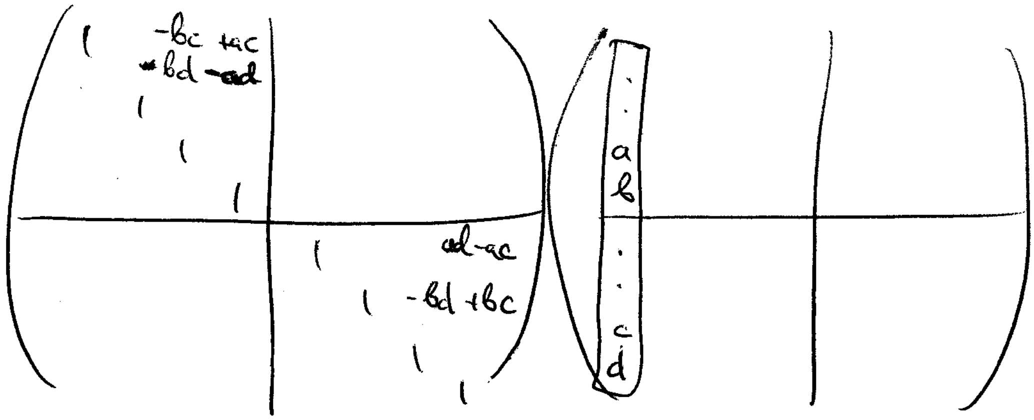
Вавилов–Казакевич, 2008

(A_3, P_2) — доказательство

$$\begin{pmatrix}c&d&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&*&*\\&1&*&*\\&&1&0\\&&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot\\\cdot\\a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&&&\\0&&&\\0&&&\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}db & -ad\\ -cb & ac\end{pmatrix}$$ — стабилизация столбца и строчки одновременно

C_4



$\downarrow V \oplus V^*$

4A, 23, N6

A_3 - доказательство для E_6 и E_7

$[g, x_\alpha(1)]$ — стабилизирует 2 соседних столбца этой матрицы