02.10.2012

R. Hazrat, A. Stepanov, N. Vavilov, Zhang Zuhong

Н.А. Вавилов

General multiple commutator formula

Теорема Пусть A — квазиконечная алгебра над коммутативным кольцом R, $\delta(R)<\infty$ и $n\geq 3$. Пусть $I_i \trianglelefteq A$, $i=1,\dots,m$ — двусторонние идеалы, и $m > \max(\delta(R)+3-n, 1)$. Тогда

$$[SL(n,A,I_1),\dots,SL(n,A,I_m)] = [E(n,A,I_1),\dots,E(n,A,I_m)].$$

$$SL(n,A,I) = S^0L(n,A,I)$$

① База $m=1$, $\delta(R)=0$

Теорема Бака: $SL(n,A,I)=E(n,A,I)$

② $m=2$, $\delta(R)=1$

Теорема Мэйсона — Стотерса

$$[GL(n,A,I), GL(n,A,J)] = [E(n,A,I), E(n,A,J)]$$

Это используется в доказательстве. Что еще?

③ Относительное коммутаторное исчисление

Например,

Теорема Пусть h,p,q,r даны, $h\geq 3$. Тогда $\forall k,l$ существуют такие l и o, что $s,t\in R$

$$\left[E^k\left(n, \frac{t^{2l}}{s^{2h}}A, \frac{t^{2l}}{s^{2h}}I\right), E^l\left(n, \frac{s^{2o}}{t^{2r}}A, \frac{s^{2o}}{t^{2r}}J\right)\right] \subseteq$$

$$\subseteq [E(n, s^pt^qA, s^pt^qI), E(n, s^pt^qA, s^pt^qJ)]$$

$t_{ji}\left(\frac{t^{2l}}{s^{2h}}\xi\right)$

$t_{ij}\left(\frac{t^{2l}}{s^{2h}}\xi\right)$ — образующие $E(n,\dots,\dots)$, $\xi\in I$

Бак определял так: $S^mL(n,R,I) = S^mL(n,R)\cap GL(n,R,I)$

правильно так: $S^mL(n,R,I) = \bigcap_{\substack{\varphi:(R,I)\to(R',I')\\ \delta(R')\leq m}} \ker(GL(n,R,I)\longrightarrow K_1(n,R',I'))$

(в коммутативном случае)

$[E(n,A,I), E(n,A,J)]$ порождается следующими элементами:

① $z_{ij}(\xi\zeta,\eta)$, $\xi\in I$, $\zeta\in J$, $\eta\in A$
$$z_{ij}(\xi\zeta,\eta) = {}^{t_{ji}(\eta)}t_{ij}(\xi\zeta)$$

② $[t_{ij}(\xi), z_{ij}(\zeta,\eta)]$

③ $[t_{ij}(\xi), t_{ji}(\zeta)]$

---

④ Теорема об инъективной стабилизации K_1 (Басс–Васерштейн)

$$K_1(\Delta,R,I)\longrightarrow K_1(\Phi,R,I)$$ — ее нет для групп Шевалле

⑤ Стандартная коммутационная формула, из которой вытекает

$$[[E(n,A,I_1),\dots,E(n,A,I_h)],\ [E(n,A,I_{h+1}),\dots,E(n,A,I_m)]] = [E(n,A,I_1\circ\dots\circ I_h), E(n,A,I_{h+1}\circ\dots\circ I_m)]$$

где $I\circ J = IJ+JI$

$$\boxed{[E(n,A,I_1), GL(n,A,I_2),\dots, GL(n,A,I_m)] = [E(n,A,I_1),E(n,A,I_2),\dots,E(n,A,I_m)]}$$

$\boxed{\text{т. Хазрата–Чжана, Isr. J. Math, 2012}}$

Bak's Induction Lemma

R — комм. кольцо, $\delta(R)<\infty$, $X_1\cup\dots\cup X_r = \mathrm{Max}(R)$,
X_i — неприводимые нетеровы комбинаторной размерности $\leq\delta(R)$
Если $s\in R$ — такой, что $\forall X_k\ \exists\, m_k\in X_k: s\notin m_k$,
то $\delta(\tilde R_{(s)}) < \delta(R)$

$$\hat R_{(s)} = \varprojlim R/s^kR$$ — это можно: $R\longrightarrow \hat R_{(s)}$ не инъективно и не сюръективно

$$\tilde R_{(s)} = \varinjlim_{\substack{R_i\text{ — нетерово},\\ R_i\ni s}} \hat R_{i,(s)}$$ — finite s-completion

Определим $GL(n, A, I, s^{-1}) = Ker(GL(n,A,I) \to K_1(n, A_s, I_s))$

главная локализация

$GL(n, A, I, \hat{s}) = Ker(GL(n,A,I) \to K_1(n, \tilde{\hat{A}}_{(s)}, \tilde{\hat{I}}_s))$ главная локализация

Что написано у Бака? $I = A$

<u>Теорема локализации-пополнения Бака</u>

$$[GL(n, R, s^{-1}), GL(n, R, \hat{s})] \leq E(n, R)$$

поставить I в одном месте легко: $[GL(n, A, I, s^{-1}), GL(n, A, \hat{s})] \leq E(n, A, I)$

<u>Док-во:</u> ① сводится к нетеровым кольцам — стандартно (коммутирует с проективными пределами)

A — кон. пор. над нетеровым комм. кольцом R

$x \in GL(n, A, I, s^{-1}) \iff F_s(x) \in E^K(n, \frac{A}{s^k}, \frac{I}{s^k})$ $\quad F_s : R \to R_s$

$y \in GL(n, A, \hat{s}) \iff \pi_{s^m}(y) \in E(n, A/s^m A)$ для <u>всех</u> m

$$\Updownarrow$$

$$y \in \underset{\ni u}{E(n, A)}\, GL(n, A, \underset{\ni z}{s^m A})$$

$$\Updownarrow$$

$$y = uz$$

$$[x, y] = [x, uz] = \underset{\substack{\cap \\ [GL(n,A,I), E(n,A)] \\ \| \\ E(n,A,I)}}{[x, u]} \cdot {}^u[x, z]$$

---

① Doubly relative локализация - пополнение

$$[GL(n, A, I, s^{-1}), GL(n, A, J, \hat{s})] = [E(n, A, I), E(n, A, J)]$$

<u>Док-во</u> — точно так же до след. места

Нам нужно, чтобы $z \in GL(n, A, s^m J)$

А на самом деле $z \in GL(n, A, J \cap s^m A)$

Лемма 23 Пусть A — кон. пор. над нетеровым R, $I \trianglelefteq A$. Тогда $\forall l$ и $\forall s \in R$ $\exists m$: $I \cap s^m A \subseteq s^l I$

trirelative локализация — положение:

Теорема A — квазиконечная алгебра над комм. кольцом R, $n \geq 3$, $s \in R$; $I, J, K \trianglelefteq A$. Тогда

$$[[GL(n, A, I, \hat{s}), GL(n, A, J)], GL(n, A, K, s^{-1})] =$$

$$= [E(n, A, \underbrace{IJ + JI}_{= I \circ J}), E(n, A, K)].$$