Параболические факторизации матричных колец.

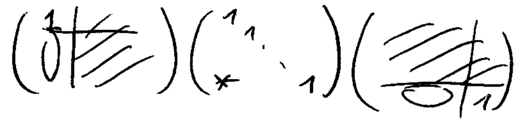
19.11.2012

К. Цветков

1. Разложение Денниса – Васерштейна

$n \geqslant sr(R) + 2 \Rightarrow$

$$E(n,R) = EP_1 \cdot X_{n1} \cdot EP_n$$



2. Вавилов – Синчук:

$sr(R) \leqslant r - s$

$$E(n,R) = EP_r \cdot U^-_{rs} \cdot EP_s$$

$$GL(n,R) = P_r \cdot U^-_{rs} \cdot P_s$$

Хочется поставить $M(n,R)$ вместо $GL(n,R)$

R — асс. кольцо с $1 \neq 0$

$$\underset{i\neq j}{t_{ij}(\lambda)} = e + \lambda e_{ij}$$

$$X_{ij} = \langle t_{ij}(\lambda) \mid \lambda \in R \rangle$$

$$E(n,R) = \langle t_{ij}(\lambda) \mid 1 \leq i \neq j \leq n,\ \lambda \in R \rangle$$

$(a_1, \dots, a_m)$ — унимодулярна, если $a_1R + \dots + a_mR = R$ $\Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} : \sum a_i b_i = 1$

стабильна, если $\exists\, b_1, \dots, b_{m-1}$:

$(a_1 + a_m b_1, a_2 + a_m b_2, \dots, a_{m-1} + a_m b_{m-1})$ унимодулярна

Стабильный ранг — $\min\{m :$ ∀ унимод. строка длины $m+1$ стабильна$\}$

$\boxed{\text{Упражнение}}$ $m > sr(R)$ $(a_1, \dots, a_m)$ — унимод. $\Rightarrow$ стабильна

$$P_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x \in GL(i,R) \\ y \in M(i, n-i, R) \\ z \in GL(n-i, R) \end{matrix} \right\}$$

Разложение Леви: $P_i = L_i \ltimes U_i$: $U_i = \left\{ \begin{pmatrix} e & y \\ 0 & e \end{pmatrix} \right\}$

$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \,\middle|\, \right\}$ $\qquad P_i^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} \right\}$

$U_{ij} = U_i \cap U_j$ $\qquad EP_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} x \in E(i,R) \\ z \in E(n-i,R) \end{matrix} \right\}$

$$EP_i = EL_i \ltimes U_i$$

$EP_i \leq P_i \cap E(n,R)$

$r > s$
$(s, r-s, n-r)$

$$P_r = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad P_s = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$L_r = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \quad L_s = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$U_r = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & * \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad U_s = \begin{pmatrix} e & * & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad U_{rs} = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

$$U_r^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & * & e \end{pmatrix} \quad U_s^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ * & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix} \quad U_{rs}^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix}$$

$X_{n,1} = U^-_{1,n-1}$

$$MP_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x \in M(i,R) & z \in M(n-i,R) \\ y \in M(i, n-i, R) & \end{matrix} \right\}$$

Рассматриваем два типа колец:

1) Кольца Безу (правые, левые)
   ($\forall$ конечно порожденный идеал (правый, левый) — главный)
2) Эрмитовы кольца: точнее, левые (правые) k-эрмитовы кольца
   (Капланский: $k=2$, 1949)

Правое k-эрмитово кольцо: $(k \geq 2)$

$\forall (a_1, \dots, a_k)$ $\exists$ обратная матрица $p \in GL(k,R)$:

$(a_1, \dots, a_k) \cdot p = (d, 0, \dots, 0)$

Левое: $\dots$ $q \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Предложение}}$ R — левое (правое) k-эрмитово кольцо
$\Rightarrow sr(R) \leq k$

<u>Док-во</u>. $a_1R + a_2R + \dots + a_{k+1}R = R$

$\to (a_1, \dots a_k) \rightsquigarrow \exists p: (a_1, \dots, a_k)p = (d, 0, \dots 0) \qquad p^{-1} = (p'_{ij})$

$\Rightarrow (a_1 + a_{k+1}p'_{k,1}, a_2 + a_{k+1}p'_{k,2}, \dots, a_k + a_{k+1}p'_{k,k})$ — унимодулярна $\square$

$\boxed{\text{Предложение}}$ R — k-эрмитово $\Rightarrow$ R — $(k+1)$-эрмитово

Лемма

R — кольцо Безу, $sr(R) = n$, $m > n$

$\Rightarrow \forall (a_1, \dots, a_m)\ \exists p \in E(m, R)$:

$$(a_1, \dots, a_m)p = (d, 0, \dots, 0).$$

Док-во:

1) $a_1R + \dots + a_mR = R$

$$(a_1 + a_m v_1)R + \dots + (a_{m-1} + a_m v_{m-1})R = R$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ v_1 & \dots & v_{m-1} & 1 \end{pmatrix} = p \in E(m, R)$$

$$(a_1 + a_m v_1)u_1 + \dots + (a_{m-1} + a_m v_{m-1})u_{m-1} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & u_1(1-a_m) \\ & 1 & & u_2(1-a_m) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & u_{m-1}(1-a_m) \\ & & & 1 \end{pmatrix} = q$$

$\rightsquigarrow \exists \underset{E(m,R)}{pqx} : (a_1, \dots, a_m)\underbrace{pqx}_{y} = (1, 0, \dots, 0)$

$$\rightsquigarrow y^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ & & * & \end{pmatrix}$$

2) Общий случай: $a_1R + \dots + a_mR = dR$

$$a_1u_1 + \dots + a_mu_m = d$$

$a_i = db_i$ $\qquad db_1u_1 + \dots + db_mu_m = d$

Возьмем $c = 1 - b_1 - b_2 - \dots - b_m$

$(b_1, \dots, b_m, c)$ — унимодулярна $\Rightarrow$ стабильна

$\rightarrow (b_1 + cv_1, \dots, b_m + cv_m)$ — унимодулярна

$\rightsquigarrow \exists p \in E(m, R) : p = \begin{pmatrix} \vdots & * \end{pmatrix}$

$$(a_1, \dots, a_m) = (d, 0, \dots, 0) \cdot p$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ R — левое k-эрмитово кольцо, $a \in M(m, n, R)$

- $sr(R) < k \rightsquigarrow \exists g \in E(m, R)$:
- $sr(R) = k \rightsquigarrow \exists g \in GL(m, R)$:

$$g \cdot a = \begin{pmatrix} A & B \\ \underbrace{0}_{m-k+1} & \underbrace{C}_{n-m+k-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, m-k+1 \\ \}\, k-1 \end{matrix}$$

A — квадратная верхнетреугольная

$\boxed{\text{Лемма}}$ R — правое k-эрмитово кольцо, $n \geq k$

$\forall a \in M(m,n,R)$

- $sr(R) < k \rightsquigarrow \exists g \in E(n,R)$
- $sr(R) = k \rightsquigarrow \exists g \in GL(n,R)$:

$$a \cdot g = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c|c} A & B_* \\ \hline O & \ddots^{**} \end{array}\right) & \}\, k-1 \\ \underbrace{\quad}_{k-1} & \end{array}$$

$$MP_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x \in M(i,R) \\ y \in M(i,n-i,R) \\ z \in M(m-i,n-i,R) \end{array} \right\} \subseteq M(m,n,R)$$

$\boxed{\text{Теорема 1}}$ R — левое k-эрмитово кольцо

$M(m,n,R)$, $1 \leq s \leq \min(m-k+1, n)$

$1 \leq r \leq m-1$

$m \geq k$

$sr(R) \leq |r-s|$

Тогда

① $sr(R) < k$

$\Rightarrow M(m,n,R) = EP_r \cdot U^-_{rs} \cdot MP_s$

② $sr(R) = k$

$\Rightarrow M(m,n,R) = P_r \cdot U^-_{rs} \cdot MP_s$

$\boxed{\text{Теорема 2}}$ R — правое k-эрмитово кольцо

$M(m,n,R)$, $k-1 \leq r \leq n-1$

$1 \leq s \leq n-1$

$n \geq k$

$sr(R) \leq |r-s|$

① $sr(R) < k$

$\Rightarrow M(m,n,R) = MP_r \cdot U^-_{rs} \cdot EP_s$

② $sr(R) = k$

$\Rightarrow M(m,n,R) = MP_r \cdot U^-_{rs} \cdot P_s$