27.02.2013

С. Синчук

Φ — система корней, R — комм. кольцо

$$K_2(\Phi, R) \hookrightarrow St(\Phi, R) \longrightarrow G_{sc}(\Phi, R) \twoheadrightarrow K_1(\Phi, R)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (1978)

$$A_{n-1} \hookrightarrow A_n$$

$$\Phi = B, C, D \quad \Phi_{n-1} \hookrightarrow \Phi_n$$

$sr\, R \le n-1$ (для A_n), $sr\, R \le n-2$ (для Φ_n)

$$\leadsto \quad K_2(-, R) \twoheadrightarrow K_2(-, R), \quad K_1(-, R) \hookrightarrow K_1(-, R)$$

$K_2(-, R) \twoheadrightarrow K_2(-, R)$ — самое простое

$K_1 \twoheadrightarrow K_1$ — сложнее

$K_2 \hookrightarrow K_2$ — еще сложнее (? Мустафа-Заде)

$\boxed{\text{Теорема}}$ (vdK) $sr\, R \le n$, $I \trianglelefteq R$

$$\frac{SL(n, R, I)}{E(n, R, I)} \twoheadrightarrow \frac{SL(n+1, R, I)}{E(n+1, R, I)}$$

$$\Big\langle [E(n,R), SL(n,R,I)],\ (e+xy)(e+yx)^{-1} \in SL,\ y = diag(\xi, 1, \ldots, 1),\ x \in M(n, I) \Big\rangle =: \widetilde{E}(n, R, I); \quad \widetilde{E}(n, R) := \widetilde{E}(n, R, R)$$

$$\dim R \ge \dim MaxSpec(R) \ge BS\text{-}\dim(R) \ge asr(R) - 1 \ge sr(R) - 1$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ R — невырожденная аффинная алгебра над C_1-совершенным полем

$$\leadsto \quad K_1(A_{n-1}, R) \xrightarrow{\sim} K_1(A_n, R) \quad \text{при} \quad n \ge \dim R + 1$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ A_n, B_n, C_n $sr\, R \le n-1$

D_n $sr\, R \le n-2$

$$\leadsto St(\Phi, R) = U^+ U^- \underbrace{St(A_{n-1}, R)}_{\ni a} (St(\Phi_{n-1}, R) \ltimes U_1)$$

$$x_{-\alpha_n}(\xi)\, a v^+ = a v^+ \Rightarrow x_{-\alpha_n}(\xi)^a \in P_1 \cap U_n^- \subseteq EP_1$$

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{G(\Phi_{n-1}, R)}{E(\Phi_{n-1}, R)} & \longrightarrow & \dfrac{G(\Phi_n, R)}{E(\Phi_n, R)} \ni g = u\, l\, a\, v\, t, \quad t \in U_n \\
& \searrow & \uparrow \downarrow \\
& & \dfrac{G(\Phi_{n-1}, R)}{\langle E(\Phi_{n-1}, R), \widetilde{E}(n, R) \rangle} \quad \xrightarrow{id} \quad \widetilde{E}(\Phi_{n-1}, R)\, t
\end{array}$$

$$\langle E(\Phi_{n-1}, R), \widetilde{E}(n, R) \rangle \cap E_{Vas}(\Phi_{n-1}, R)$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Basu–Rao–Jose

$$K_1(D_{d+1}, R) \xrightarrow{\sim} K_1(D_{d+2}, R)$$

R — хорошая, $\dim R = d$, $2 \in R^*$
(афф. алг. над...)

$\rightsquigarrow E(d+1, R)$ действует транзитивно на унимодулярных столбцах высоты $d+1$.

Jean-Louis Loday

Когомологии и относительные группы Стейнберга (1978)

<u>Относительное расширение</u>

$$N \xrightarrow{\partial} Q$$

— это ${}_N M \xrightarrow{\mu} {}_N N$: ($N \curvearrowright N$ — сопряжением)

$$\mu(n \circ m) = n\,\mu(m)\,n^{-1}$$

$$\underset{\substack{\| \\ \operatorname{Ker}\mu}}{L} \hookrightarrow M \xrightarrow{\mu} N \twoheadrightarrow Q$$

на L можно определить действие Q

Если оно тривиально, расширение называется <u>центральным</u>

Пример:

$$H^3(St(..), St(..)) \hookrightarrow St(\Phi, R, I) \longrightarrow St(\Phi, R) \twoheadrightarrow St(\Phi, R/I)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} q \cdot l = \lambda^{-1}(\tilde{q} \cdot \lambda(l)) \\ \quad \text{где } \partial\tilde{q} = q \end{array}}$$

конгруэнтность:

```tikzcd
L \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
L \arrow[r] & M' \arrow[r] & N \arrow[r] & Q
```

$$C^*(Q, \mathbb{Z}) \xrightarrow[\partial^*]{} C^*(N, \mathbb{Z}) \longrightarrow \operatorname{Coker}\partial^*$$

$$\uparrow$$

$$\rightsquigarrow H^i(Q, N; \mathbb{Z})$$

L-коэффициенты

$\boxed{\text{Теорема}}$ $\mathcal{E}xt(Q, N; L) \simeq H^3(Q, N; L)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ $G_1 \underset{d_0, d_1}{\overset{s}{\leftleftarrows}} N \xrightarrow{\partial} Q$ — коуравнитель, $d_i s = id$, ${}_N G_i = \operatorname{Ker} d_i$

$n \cdot g = s(n) \cdot g \cdot s(n)^{-1}$

$[G_0, G_1]$ — инвар. отн-но действия $N \rightsquigarrow \exists$ универсальное относительное центральное расширение

(1) $H_1(G,\mathbb{Z}) = H_2(G,\mathbb{Z}) = 1$

(2) $[G_0 \cap G_1, s(N)] = 1$

Тогда $G_0 / [G_0, G_1] \xrightarrow{d_1} N$ — универсальное центральное относительное расширение (N, Q)

$\boxed{\text{Замечание}}$ (1) $\Phi = A, B, C$, $\operatorname{rk}\Phi \geq 4$ либо $\operatorname{rk}\Phi \geq 5$ $\Rightarrow St(\Phi, R)$ односвязна

(2) A_3, D_4, нет $R \longrightarrow \mathbb{F}_2$ $\Rightarrow$ односвязна

B_3, нет $R \longrightarrow \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ $\nearrow$ — Stein–vdK

(3) $K_2(\Phi, R)$ — на стаб. уровне
— после сюръективной стабилизации K_2
— A_n, $n \geq 3$ (vdK)
— C_n, D_n, $n \geq 4$ — BT?

$\boxed{\text{Предложение}}$

$$\begin{tikzcd}
R \times_I R \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & R \arrow[d] \\
R \arrow[r] & R/I
\end{tikzcd}$$

$$St(\Phi, R \times_I R) \underset{St(\Phi, p_i) = p_{i*}}{\overset{\Delta_*}{\leftrightarrows}} St(\Phi, R) \to St(\Phi, R/I)$$

$$[\underbrace{\mathrm{Ker}\, p_{1*} \cap \mathrm{Ker}\, p_{2*}}_{\subseteq K_2}, \mathrm{Im}\,\Delta_*] = 1$$

$$\underbrace{\mathrm{Ker}\, p_{1*} / [\mathrm{Ker}\, p_{1*}, \mathrm{Ker}\, p_{2*}] \to St(\Phi, R) \to St(\Phi, R/I)}_{\text{у.ц.о.р.}}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 1 \arrow[d] & & \\
1 \arrow[r] & \widetilde{K}_2(\Phi, R, I) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{St}(\Phi, R, I) \arrow[r] \arrow[d] & G(\Phi, R, I) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\Phi, R, I) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(\Phi, R) \arrow[r] \arrow[d] & St(\Phi, R) \arrow[r] \arrow[d] & G(\Phi, R) \arrow[r] \arrow[d] & K_1(\Phi, R) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & K_2(\Phi, R/I) \arrow[r] \arrow[uurrr, bend right] & St(\Phi, R/I) \arrow[r] \arrow[d] & G(\Phi, R/I) \arrow[r] & K_1(\Phi, R/I) \arrow[r] & 1 \\
 & & 1 & & &
\end{tikzcd}$$

$$\to H_3(St(\Phi, R)) \longrightarrow H_3(St(\Phi, R/I)) \longrightarrow H_3(St(\Phi, R/I), St(\Phi, R)) \longrightarrow 0$$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Loday)

Для $N \xrightarrow{\partial} Q$

$\exists$ унив. центр. отн. расш-е с ядром L $\iff$ $H_2(Q, N) = 0$

$L = \ker \mu = H_3(Q, N)$