13.03.2013

А.В. Степанов

Новый взгляд на разложение унипотентов

$$g^{-1}t_{ij}(r_m)t_{ik}(s_m)g = e + g^{-1}_{*i}\underline{(\ldots r_m \ldots s_m \ldots)g} =$$

$$= e + \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{pmatrix} \begin{array}{c} m \\ (* \ldots * \; 0 \; * \ldots *) \end{array}$$

если подобрать r_m, s_m так чтобы $(\ldots r_m \ldots s_m \ldots) \cdot$ (какой-то столбец g) $= 0$

① $E_n(R) \trianglelefteq GL_n(R)$, $n \geq 3$

- эл-ты вида $t_{ij}(r_m)t_{ik}(s_m)$ порождают $E_n(R)$

$$\prod_{m=1}^{n} t_{ij}(r_m)t_{ik}(s_m) = t_{ij}(p)$$

достаточно получить $p = 1$

② Нормальное строение

Осн. лемма $g \in GL_n(R)$ – нецентральный, ~~$g \in \ldots$~~ $H = \langle g \rangle^{E_n(R)}$. Тогда H содержит трансвекцию

– достаточно доказать, что H содержит элемент с нулем (нецентральный)

$u = t_{ij}(r_m)t_{ik}(s_m) \in E_n(R)$

$g \in H$

$$\rightarrow u^{-1}g^{-1}ug = u^{-1}\left(e + \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}(* \ldots * 0 * \ldots *)\right) \in H$$

матрица с 0

Варьируя u, можно добиться нецентральности

③ Центральность K_2

- нужно два нуля?!

Зафиксируем борелевскую B и P_1, P_2 – максимальные параболические, содержащие B, $P_1 \neq P_2$

R – область целостности, $g \in G(R)$ – общий элемент, F – поле частных R

$R = \mathbb{Z}[G]$

$$G(F) = \bigcup_{w \in W} U_{P_2} P_2^- w$$

а общий лежит во всех таких $\rightarrow g = u_w p_w \cdot w$, $w \in W$

$u_w \in U_{P_2}$, $p_w \in P_2^-$

$$u \in U_{P_1} \rightsquigarrow u^g = u^{u_w p_u w} \in (P_2^-)^w$$

$$\Updownarrow$$

$$u^{u_w} \in L_{P_2} \cap U_{P_1} \rightsquigarrow u \in (L_{P_2} \cap U_{P_1})^{u_w^{-1}}$$

Варьируем P_1, P_2, w; хочется, чтобы u порождали E_n

- достаточно получить одну корневую подгруппу для каждой длины корней

Рассмотрим $H = \langle (L_{P_2} \cap U_{P_1})^{u_w^{-1}} \cap G(R) \mid w \in W \rangle \overset{?}{\supseteq} X_\alpha(R)$

$G = GL_3$ $\quad P_1 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ $\quad P_2 = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$

$$L_{P_2} \cap U_{P_1} = \langle t_{12} \rangle$$

$w_i = (i\ 3)$

$u_{w_i} = \cancel{t_{13}(*)}\, t_{23}(*)$

$\quad$ не важно $\quad - g_{2i}/g_{3i}$

$$g = u_w \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} w$$

$$t_{12}(x_i)^{t_{23}(-g_{2i}/g_{3i})} =$$

$$= t_{12}(x_i) \cdot t_{13}(-x_i g_{2i}/g_{3i})$$

Хотим, чтобы произведение таких было равно $t_{12}(1)$

$$\prod_{i=1}^{3} t_{12}(x_i) \cdot t_{13}(-x_i g_{2i}/g_{3i}) = t_{12}(1)$$

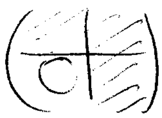
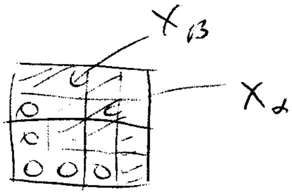
$x_i = t_i \cdot g_{3i}$ (нужно убрать знаменатели!)

$\rightsquigarrow$ получим систему лин. уравнений

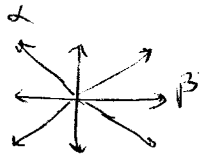
$$\begin{cases} \sum t_i g_{3i} = 1 \\ \sum t_i g_{2i} = 0 \end{cases}$$

$G = GL_4$, $\quad P_1 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$, $\quad P_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$

1 $G = Sp_4$

$P_1 =$  , $P_2 =$ 

$U_{P_1} \cap L_{P_2} = X_\alpha$



$$x_\alpha(x_i)^{x_\beta(z_i)} \cancel{x_{\alpha+\beta}(z_i)}$$

$$\|$$

$$x_\alpha(x_i)\cdot x_{\alpha+\beta}(x_i z_i)\, x_{\alpha+2\beta}(x_i z_i^2)$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} x_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i z_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} x_i z_i^2 = 0 \end{cases}$$

$z_i = z_j \rightsquigarrow$ нет!

Разложение трансвекц.-й не получить