К. Цветков

A. A. Suslin, „Stability in algebraic K-theory" (1980) — A_ℓ

И. А. Панин „О стабилизации для ортогональной и симплектической алгебраических K-теорий" Алг. и Анализ, (1989) — C_ℓ, D_ℓ

- стабилизация для H_i наступает с $\max(2i+1, i+\dim\mathrm{Max}\,R+1)$
- для K_i^V — с $sr(R)+i$

K_i^V — K-теория Володина

т.е. $K^V_{i,n}(R) = K^V_{i,n+1}(R) = K^V_i(R)$ для $n \geq sr(R)+i$

$$H_i(GL(n,R),\mathbb{Z}) = H_i(GL(n+1,R),\mathbb{Z}),\quad n \gg 0$$

R — коммутативное ассоц. кольцо с 1, $\Phi_n = C_n, D_n$

$$W(C_n) = S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$
$$W(D_n) = S_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{n-1}$$
$$G(C_n,R) = Sp(2n,R),\quad G(D_n,R) = O(2n,R)$$
$$E(\Phi_n,R) = \langle e_\alpha(\xi),\ \alpha\in\Phi_n,\ \xi\in R\rangle$$
$$St(\Phi_n,R) = \langle X_\alpha(\xi),\ \alpha\in\Phi_n,\ \xi\in R\rangle / \mathrm{Rel}$$
$$\pi_n : St(\Phi_n,R) \longrightarrow G(\Phi_n,R)$$
$$x_\alpha(\xi) \longmapsto e_\alpha(\xi)$$
$$\mathrm{Im}(\pi_n) = E(\Phi_n,R)$$
$$K_1(\Phi_n,R) = \mathrm{Coker}(\pi_n) = G(\Phi_n,R)/E(\Phi_n,R)$$
$$K_2(\Phi_n,R) = \mathrm{Ker}(\pi_n)$$

$$\Phi_n \hookrightarrow \Phi_m,\quad n\leq m$$

$$X = G, E, St, K_1, K_2$$
$$\rightsquigarrow X(\Phi_n,R) \longrightarrow X(\Phi_m,R)$$
$$X(\Phi_\infty,R) = \varinjlim X(\Phi_n,R)$$

1) $St(\Phi_\infty,R)$ — универсальное центральное расширение $E(\Phi_\infty,R)$
2) $E(\Phi,R) = [G(\Phi,R), G(\Phi,R)]$
3) $E(\Phi_n,R)$ совершенна для $n\geq 3$

$S \subseteq \Phi_n$ — специальное (замкнутое) подмн-во: а) $\alpha \in S \Rightarrow -\alpha \notin S$;

б) $\alpha, \beta \in S$, $\alpha+\beta \in \Phi_n \Rightarrow \alpha+\beta \in S$

$U(S,R) = \langle y_\alpha(\xi),\ \alpha \in S,\ \xi \in R \rangle$

$\overline{U}$ — в St

y — это либо e, либо x

$\overline{U}(S,R) \xrightarrow[\pi_n]{\sim} U(S,R)$

$w \in W(\Phi_n)$ $\quad U(\Phi_n^+, R)^w = U(w^{-1}(\Phi_n^+), R)$

$W(G, \{G_i\}_{i\in I})$ $\quad (g_0, \ldots, g_p)$ $\quad g_i \in G$

$G_i \leq G$ $\quad \exists i \in I : \forall j,k \quad g_j g_k^{-1} \in G_i$

$X = G, E, St$

$V(X(\Phi_n, R)) = |W(X(\Phi_n, R), \{U(\Phi_n^+, R)^w\}_{w\in W})|$

$\Phi_n \hookrightarrow \Phi_m \rightsquigarrow V(X(\Phi_n, R)) \hookrightarrow V(X(\Phi_m, R))$

$V(X(\Phi_\infty, R)) = \varinjlim V(X(\Phi_n, R))$ $\quad // X \neq St$

$i \geq 1 \rightsquigarrow K_i^V(\Phi_n, R) = \pi_{i-1} V(G(\Phi_n, R))$

$K_i^V(\Phi_\infty, R) = \varinjlim K_i(\Phi_n, R)$

$K_1^V(\Phi_n, R) = G(\Phi_n, R) / E(\Phi_n, R)$

$V(St(\Phi_n, R))$ — универсальное накр. пр-во $V(E(\Phi_n, R))$

$K_2^V(\Phi_n, R) = \ker(St(\Phi_n, R) \xrightarrow{\pi} E(\Phi_n, R))$

$K_i^V(\Phi_n, R) = \pi_{i-1}(V(E(\Phi_n, R))) = \pi_{i-1}(V(St(\Phi_n, R)))$

$i \geq 3,\ n \geq 3$

$\overline{E}(\Phi_n, R) = E(\Phi_\infty, R) \cap G(\Phi_n, R)$

$\overline{St}(\Phi_n, R) = \pi^{-1}(\overline{E}(\Phi_n, R))$

$\rightsquigarrow V(\overline{St}(\Phi_n, R)) \hookrightarrow V(\overline{St}(\Phi_m, R))$ $\quad n \leq m$

$V(E(\Phi_n, R)) = V(\overline{E}(\Phi_n, R))$, $\quad n \geq \dim(R) + 2$

— поскольку для K_1 есть стабилизация