Надгруппы subsystem subgroups в $Sp(2n, R)$

10.04.2013
А. Щеголев

$C_{l_1} + \dots + C_{l_k} \le C_{l_1+\dots+l_k}$ — только этот случай
(доказательство на длинных корнях)

$l_1 + \dots + l_k = n$

ν — <u>симметричное</u> ОЭ на мн-ве индексов $\{1, \dots, n, -n, \dots, -1\}$

т.е. $i \sim j \Rightarrow -i \sim -j$

(σ_{ij}) — набор идеалов $(1 \le i, j \le -1)$

<u>сеть</u>, если

1) $\sigma_{ij} \cdot \sigma_{jk} \subseteq \sigma_{ik}$
2) $\sigma_{ij} = \sigma_{-j,-i}$

<u>D-сеть</u>: 3) $\sigma_{ii} = R$

$\Gamma = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_{-1})$ — форменный параметр:

1) Γ_i — аддитивная подгруппа в R
2) $\underbrace{\{2\alpha \mid \alpha \in \sigma_{i,-i}\}}_{=2\sigma_{i,-i}} \le \Gamma_i \le \sigma_{i,-i}$
3) $\sigma_{ij}^{\boxed{2}} \cdot \Gamma_j \le \Gamma_i$, $\quad \sigma_{ij}^{\boxed{2}} = \{\alpha^2 \mid \alpha \in \sigma_{ij}\}$

<u>Относительная симплектическая сеть идеалов</u> (форменных)

(4) $\quad \sigma_{i,-i} = \langle \Gamma_i \rangle + \sum_{k \ne \pm i} \sigma_{ik} \cdot \sigma_{k,-i}$

Пусть $Ep(\nu) \le H \le Sp(2, R)$

$Ep(\nu) \cong E(C_{l_1}, R) \oplus \dots \oplus E(C_{l_k}, R)$

$\sigma_{ij} = \{\xi \mid T_{ij}(\xi) \in H\}$, $i \ne \pm j$, $\quad \Gamma_i = \{\alpha \mid T_{i,-i}(\alpha) \in H\}$ — ассоциированная сеть

$\sigma_{ii} = R$, $\sigma_{i,-i} = \overset{\text{см.}}{(4)}$

— здесь предполагается, что $h(\nu)$ [illegible] 3 (min размер класса экв-сти)

— тогда $\sigma_{ij} \trianglelefteq R$

группа $Sp(4, \mathbb{F}_2)$ не совершенна!
→ возникнут проблемы, если у R есть поле вычетов $\mathbb{F}_2$.

Лемма
$E_p(\sigma,\Gamma) := \langle T_{ij}(\xi),\ T_{i,-i}(\alpha) \mid i \neq \pm j,\ \xi\in\sigma_{ij},\ \alpha\in\Gamma_i \rangle$

$h(\nu) \geqslant \begin{matrix} 6 \text{ для } C_l \\ 3 \text{ для } A_l \end{matrix}$. Тогда $E_p(\sigma,\Gamma)$ совершенна.

Лемма Определим
$(\sigma,\Gamma) \leqslant (\tau, B)$, если
$\sigma_{ij} \leqslant \tau_{ij}$
$\Gamma_i \leqslant B_i$

Тогда $\forall H : E_p(\nu) \leqslant H$, $h(\nu) \geqslant 3$
$\Rightarrow \exists$ единственная макс. сеть (σ,Γ)
такая, что $E_p(\sigma,\Gamma) \leqslant H$

$$\underset{\substack{\cup\\ g}}{Sp(\sigma,\Gamma)} \leqslant Sp(2n, R)$$

(1) $g_{ij} \equiv \delta_{ij} \pmod{\sigma_{ij}}$

(2) $S_{i,-i}(g) = \sum_{j>0} g_{ij}\cdot g'_{j,-i} \in \Gamma_i$

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in M(n,R)$$

$$\begin{pmatrix} a^t p c & 0 \\ 0 & b^t p d \end{pmatrix} \leqslant \underset{\substack{\parallel \\ \{a\in M(2n,R) \mid a = a^t,\ a_{ii}\in\Gamma_i\}}}{AH(2n, R, \Gamma)}$$

Лемма
$g \in Sp(2n,R) \in \mathrm{Transp}_{Sp(2n,R)}(Ep(\sigma,\Gamma), Sp(\sigma,\Gamma))$

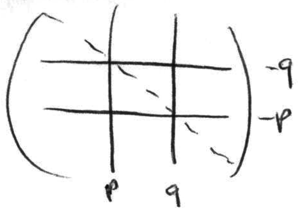
$\Longleftrightarrow g_{ik}\cdot\sigma_{kl}\cdot g'_{lj} \in \sigma_{ij} \quad \forall i,j,k,l$

Док-во $S_{i,-i}(h^{-1}gh) = \sum \ldots$ $\square$

Лемма $a = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in H \qquad a_{ir} \in \sigma_{ir}$

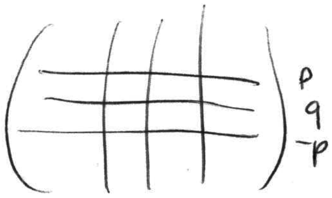
Лемма


Лемма



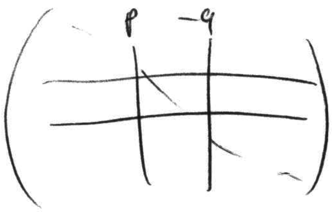
$p \sim -p$

Лемма



$p \sim -p \sim q$

Лемма



$p \sim q$

Лемма $h(\nu) \geq 4$, $a \in H$ $\quad b = a \cdot T_{s,-s}(\underset{\in \Gamma_s}{\xi}) \cdot a^{-1}$

$\alpha, \beta \in R: \ \alpha a_{ps} + \beta a_{qs} = 0$

h, p, q — три эквивалентных индекса т.ч. $\pm h, \pm p, \pm q$ — различны

Тогда $\alpha b_{ih}, \beta b_{ih} \in \sigma_{ih}$ $\ \forall i \neq -p, -q$

Следствие $i \neq -p, -q$ $\quad a_{ps} \cdot a_{is} \cdot \xi \cdot a'_{-s,h} \in \sigma_{ih}$

$\Rightarrow a_{is} \cdot \xi \cdot a'_{-s,h} \in \sigma_{ih}$

поэма на арабском

"длинная часть транспортера"

$H \leq \mathrm{Transp}(\sigma, \Gamma)$

$\boxed{b_{ij} \overset{?}{\in} \sigma_{ij}}$ $\quad b = a \cdot T_{sr}(\xi) a^{-1} \Longrightarrow b \cdot T_{-i,i}(1) \cdot b^{-1}$

$\underset{\sigma_{-i,j} = \sigma_{ij}}{b_{-i,-i} \cdot 1 \cdot b_{ij}} - b_{ij} + \sigma_{ij}$ $\qquad \Gamma_{i,-i} = R$

Теорема $h(\nu) \geq 4$, $i \sim -i \ \forall i$

$\Rightarrow \exists!$ сеть (σ, Γ) т.ч.

$$E_p(\sigma, \Gamma) \leq H \leq \mathrm{Transp}(\sigma, \Gamma)$$

Для коротких сделано все вплоть до поэмы на арабском