24.04.2013

R. Keith Dennis — А. Лавренов

In Search of New "Homology" Functors Having a Close Relationship to K-Theory

– хочется найти функторы $\widetilde{H}_i$

① $\widetilde{H}_i(G,M) \longrightarrow H_i(G,M)$, M – G-модуль

② $\widetilde{H}_i(R^*,\mathbb{Z}) \longrightarrow K_i(R)$

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{H}_i(GL_n(R),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & K_i(M_n(R)) \\ \downarrow & & \downarrow\wr \\ \widetilde{H}_i(GL_{n+1}(R),\mathbb{Z}) & \longrightarrow & K_i(M_{n+1}(R)) \end{array}$$

③ $\widetilde{H}_*(G,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(G,\mathbb{Z})$, $\widetilde{H}_*(R^*,\mathbb{Z}) \longrightarrow K_*(R)$

В этой статье Деннис определяет $\widetilde{H}_2(G,\mathbb{Z})$

$i \in \{0,1\} \rightsquigarrow \widetilde{H}_i(G,M) = H_i(G,M)$

$i=2$: $H_2(\mathbb{Z}^*,\mathbb{Z}) = 1$

$K_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$

G, H $\quad G \curvearrowright H$, $H \curvearrowright G$

$$G \times H \xrightarrow{b} L$$

① $b(gg', h) = b({}^g g', {}^g h)\, b(g,h)$

② $b(g, hh') = b(g,h)\, b({}^h g, {}^h h')$

– <u>скрещенное билинейное отображение</u>

Пример: $G \times G \xrightarrow{[\,,\,]} G$

Универсальное такое отображение называется <u>некоммутативным тензорным произведением</u>

$$G \otimes H = \langle g \otimes h \in G \times H \mid (1), (2) \rangle$$

$\boxed{\text{Утв.}}$ Если G совершенна ($H_1(G)=0$), то в $G \otimes G$ выполнено $g \otimes g = 1$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $[g_1, g_2] \otimes [h_1, h_2] = [g_1 \otimes g_2, h_1 \otimes h_2]$

– тогда $1 = \left(\prod [g_i, h_i]\right) \otimes \left(\prod [g_i, h_i]\right)$

$\boxed{\text{Утв.}}$ G – совершенна $\rightsquigarrow$
$$\begin{array}{ccc} G\otimes G & & g\otimes h \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & & [g,h] \end{array}$$
– универсальное центральное расширение

<u>Док-во</u> G совершенна $\rightsquigarrow$ пусть $U \xrightarrow{\pi} G$ – ее универсальное центральное расширение. Определим

$$G\times G \longrightarrow U$$
$$(g,h) \longmapsto [\pi^{-1}(g), \pi^{-1}(h)]$$

– это скрещенное билинейное отображение

$$\rightsquigarrow \begin{tikzcd} G\otimes G \arrow[r] \arrow[dr] & U \arrow[d, "\pi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

После этого из Леммы следует, что $G\otimes G \longrightarrow G$ – центральное расширение

$\Downarrow$

есть расщепление $U \longrightarrow G\otimes G$ $\square$

и $G\otimes G$ совершенна $\rightarrow U\cong G\otimes G$

Тогда ядро $G\otimes G \longrightarrow G$ – это H_2

$$\begin{tikzcd} E(R)\otimes E(R) \arrow[r, "\sim", "x\otimes y\mapsto[\pi^{-1}(x),\pi^{-1}(y)]"'] \arrow[d, "{[\,,\,]}"] & St(R) \arrow[d, "\pi"] \\ E(R) \arrow[r, equal] & E(R) \end{tikzcd}$$

– ну, или E_n, если K_2 централен (R – коммутативно, $n\geq 5$)

Пусть теперь G произвольна.

Определим $G\wedge G = \dfrac{G\otimes G}{a\otimes a = 1}$

$\Downarrow$ (C. Miller, 1952)

$$H_2(G) \rightarrowtail G\wedge G \xrightarrow{[\,,\,]} G \longrightarrow H_1(G)$$ – точная посл-сть

Посмотрим на $\dfrac{G\otimes G}{(a\otimes b)(b\otimes a)} = G\tilde{\otimes} G$

$$\widetilde{H}_2(G) \hookrightarrow G\tilde{\otimes} G \longrightarrow G$$ – это определение $\widetilde{H}_2(G)$

Тогда $\widehat{H}_2(G) \longrightarrow H_2(G)$

Построим $\tilde{H}_2(GL_n(R)) \longrightarrow K_2(R)$

$R^\times \longrightarrow GL_n(R)$ — диагональное

$GL_n \tilde{\otimes} GL_n \longrightarrow St(R)$ — для этого построим

$$\underset{\substack{\Psi\\ a}}{GL_n} \times \underset{\substack{\Psi\\ b}}{GL_n} \xrightarrow{B} St(R)$$

$$\pi\left(\left[\pi^{-1}\begin{pmatrix} a & & \\ & a^{-1} & \\ & & 1\end{pmatrix}, \pi^{-1}\begin{pmatrix} b & & \\ & 1 & \\ & & b^{-1}\end{pmatrix}\right]\right) = [a,b] \in GL_{3n}(R)$$

элементарные матрицы

— нам-то хочется в $GL_{n+1}(R)$

— тогда получилось бы отображение

$$\tilde{H}_2(GL_n(R)) \longrightarrow St_{n+1}(R)$$

Если $\hat{a}$, $\hat{b}$ такие, что

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & \hat{a} & \\ & & 1\end{pmatrix} \in E \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} b & & \\ & 1 & \\ & & \tilde{b}\end{pmatrix} \in E,$$

то их коммутатор даст то же самое

Это дает нам кососимметричное скрещенное билинейное отображение B:

$$B(ab, c) = B({}^a b, {}^a c) \cdot B(a, c)$$

$a' = a \oplus \hat{a}^{-1} \oplus 1 \oplus 1$

$b' = b \oplus 1 \oplus \hat{b}^{-1} \oplus 1$

$c' = c \oplus 1 \oplus 1 \oplus c^{-1}$

$$\sim [{}^{a'}b', {}^{a'}c'] = B({}^a b, {}^a c)$$

$$[a', c'] = B(a, c)$$

$$[a'b', c'] = B(ab, c)$$

в силу корректности определения B, и далее понятно.

Аналогично доказывается оставшееся свойство

— но ~~[illegible]~~ $B(a,a) \neq 1$

$$\begin{tikzcd} \hat{H}_2(GL_n) \arrow[r] \arrow[d] & K_2 \arrow[d] \\ GL_n \tilde{\otimes} GL_n \arrow[r] \arrow[d] & St \arrow[dd] \\ GL' \arrow[d, equal] & \\ E \arrow[r, equal] & E \end{tikzcd}$$

, $\tilde{H}_2(R^*) \longrightarrow K_2$

Оказывается,

$$\tilde{H}_2(G, \mathbb{Z}) = \pi_2^s K(G, 1)$$

В роде бы $\pi_3^s K(G, 1) \twoheadrightarrow H_3(G)$

$$\pi_n^s K(G, 1) \xrightarrow{?} H_n(G)$$

Если убрать s, сюръективности точно не будет.

$$\begin{tikzcd} St_{n-1} \arrow[r, two heads] & St_n \arrow[r] & St_{n+1} \\ K_{2,n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook] & K_{2,n} \arrow[r, two heads] \arrow[u, hook, "cent"'] & K_{2,n+1} \arrow[u, hook, "cent"'] \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ $\mathrm{sr}\,R \leq n-2$

можно ли смотреть на

$$\begin{tikzcd} St_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & St_{n+1} \arrow[d, equal] \\ E_n \otimes E_n \arrow[r] & E_{n+1} \otimes E_{n+1} \end{tikzcd}$$

?

$\hat{a} \in E_n \otimes E_n$, $\hat{a} \mapsto \hat{a}$

$\tilde{\hat{a}} \stackrel{?}{=} 1$