

Изоотропные группы над кольцом многочленов Лорана

$$R_n = k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}], \quad k - \text{поле}$$

G/R_n такие группы связаны с группами Каца-Муца

Пусть \mathfrak{g} — простая расщепимая алгебра Ли (алг. Вебале)

Аффинная алгебра Каца-Муца — это циркулярная форма

$$\text{алгебры } \left(\mathfrak{g} \otimes_k k[t^{\pm 1}] \right) \oplus k\mathfrak{c} \rtimes k\mathfrak{d}$$

свобода Ли определяется хитро: на $k\mathfrak{c}$ она связана с формулой Киллинга

дифференцирование, продолжающее ее $t \frac{d}{dt}$

аффинная алгебра Ли

все это — аффинная алгебра Каца-Муца

Можно обобщить на $k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$

$\mathfrak{g} \otimes k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ — multi loop algebra

+ навесить слагаемые \rightsquigarrow extended affine Lie algebra

Группы Каца-Муца и multi loop groups

— почти что группы точек $G(k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}])$, G — л/п алг. гр.

если они расщепимы.

Теорема (Черноусов — Жиль — Пияксона) 2008, 2011

① Пусть G — ред. гр. схема над k , $\text{char } k$ — "хорошая"

$$\text{Тогда } H_{\text{ét}}^1(k[t^{\pm 1}], G) \xrightarrow{\cong} H_{\text{ét}}^1(\underbrace{k((t))}_{\text{ряды Лорана}}, G)$$

② Пусть G — групповая схема Вебале — Демазюра

$$H_{\text{ét}}^1(k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}], G)_{\text{total}} \longrightarrow H_{\text{ét}}^1(k((t_1) \dots ((t_n)), G)$$

↑
т.е. соответствующая циркулярная группа имеет максимальный топ

Теорема (ЧЖН, 2011)

G — односвязная полупростая изотропная группа над

$$R_n = k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$$

Тогда
$$K_1^G(R_n) \longrightarrow K_1^G(F_n)$$

\downarrow
 $k((t_1)) \otimes \dots \otimes k((t_n))$

$$\text{т.е. } G(F_n) = G(R_n) E(F_n)$$

Теорема (Ставрова)

G/R_n — односвязная полупростая группа, k — ан-замкнута, $\text{изк } G \geq 2$. Тогда
$$K_1^G(R_n) \cong K_1^G(F_n)$$

$$\boxed{NB} \quad \text{Br}(\mathbb{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{C}_n^2}$$

Лемма 1

Пусть A — комм. кольцо, G/A — ред. группа, $\text{изк } G \geq 2$

Тогда
$$E(A((t))) = E(A[[t]]) E(A[t, t^{-1}])$$

Доказ: Достаточно показать, что

$$\underline{X_\alpha(t^{-k}v) E(A[[t]])} \subseteq E(A[[t]]) E(A[t, t^{-1}])$$

$$X_\alpha(v \otimes \sum_{i=-N}^{\infty} a_i t^i) \in X_\alpha(v \otimes_A A((t)))$$

$$\beta \in \Phi_\beta$$

$$[X_\alpha(t^{-k}v), X_\beta(t^l u)] = ?$$

← при $l \gg 0$

$$v \in V_\alpha \quad u \in V_\beta \otimes A[[t]]$$

a) $a \neq \beta$

б) $a \parallel \beta$

$$\underbrace{X_\beta(u \otimes \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i)}_{\uparrow E(A[[t]])} = X_\beta(u \otimes \sum_{i \geq l} a_i t^i) \underbrace{X_\beta(u \otimes \sum_{i=0}^{l-1} a_i t^i)}_{\downarrow E(A[t, t^{-1}])} \prod_{k \geq 0} X_{\kappa \beta}(\dots)$$

a) $\alpha \notin \beta \rightsquigarrow$ ком. формула Вебера говорит, что

при $\ell \gg 0$ $N_{\alpha \notin \beta} (t^{-k} v, t^\ell u) \in V_{\alpha \notin \beta} \otimes_A A[[t]]$

b) $\alpha \in \beta \rightsquigarrow$ Lemma 11 из [PS, 2008]

$\forall u \in A[[t]] \otimes_A V_\beta \exists \gamma_i \in \Phi_\beta, \gamma_i \notin \beta$
 $u_i \in V_{\gamma_i} \otimes_A A[[t]], d_i > 0$ т.ч.

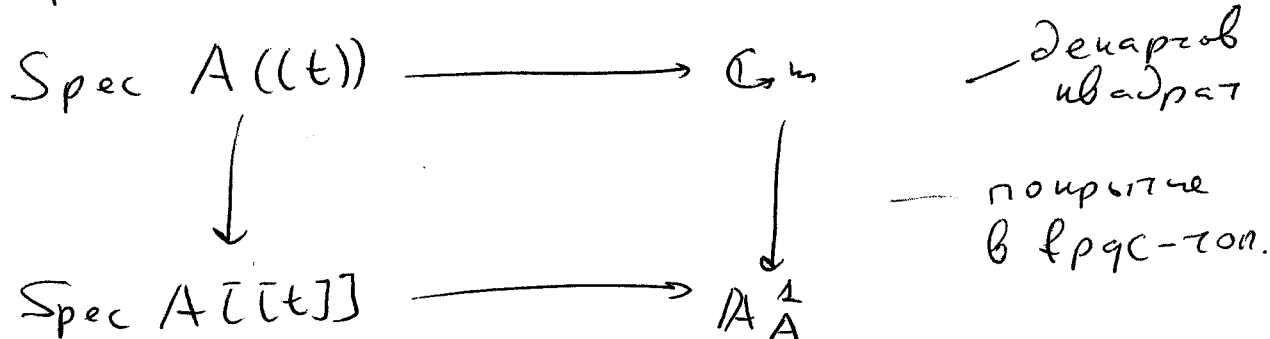
$$X_\beta(x^2 u) = \prod X_{\gamma_i}(x^{d_i} u_i)$$

$$[X_\alpha(t^{-k} v), X_\beta(t^\ell u)] \quad \ell = 2N \gg 0$$

$$\prod X_{\gamma_i}(t^{N d_i} u_i) \in V_{\gamma_i} \otimes_A A[[t]]$$

□

Геометрическая интерпретация



$$G(A[[t, t^{-1}]]) \cap G(A[[t]]) = G(A[[t]])$$

$\rightarrow K_1^G$ имеет связь поом. к такому квадрату

Теорема 2 A — регулярное кольцо, содержащее деление k

G/A — ред. группа: $\text{rk } G \geq 2$. Тогда

$$K_1^G(A[t, t^{-1}]) \hookrightarrow K_1^G(A((t))).$$

Доказ. $g \in E(A((t))) \cap G(A[t, t^{-1}]) \stackrel{?}{\implies} g \in E(A[t, t^{-1}])$

$$E(A[t^{\pm 1}]) E(A[[t]])$$

3

→ м. считать, что $g \in E(A[t]) \cap G(A[b, t^{-1}]) \subseteq G(A[t])$

по [Панни-Вавилов-Стебров] + лемма из [PS] + лемма из [Стебров - A^{\pm} -инв. K_1]

$$\begin{array}{c} G(A[t]) \\ \parallel? \\ G(A)E(A[t]) \end{array}$$

$$G(A[t]) = G(A)E(A[t])$$

$\leadsto g \in \cancel{G(A)E(A[t])} \cap E(A[t])$

// $t=0 \leadsto g_0 \in E(A) \leadsto g \in E(A[t])$
 $g \circ g_0$

□

Доказ-во Т1

k -ан. з. поле

$G/k[x^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$. Для простоты возьмем

$$G/k[x^{\pm 1}], \text{ нужно доказать, что } K_1^G(k[x^{\pm 1}]) \hookrightarrow K_1^G(k((x)))$$

Лемма (Панни)

k -поле; X/k — гладкое неприводимое афф. многообразие

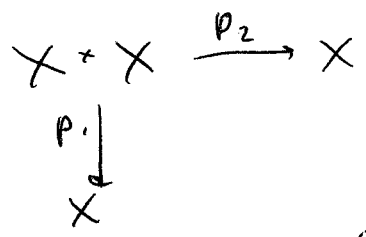
H/k — гладкая гр. схема, \mathcal{H} — H -тортор над X , который

расщепляется конечным накрытием $\tilde{X} \longrightarrow X$;

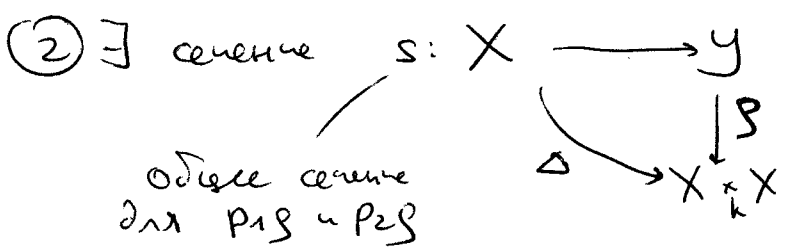
и $\tilde{X} \times_k \tilde{X}$ связно.

Тогда $\exists \gamma \xrightarrow{\mathcal{S}} X \times_k X$ — конечное étale накрытие

т.ч. ① $\mathcal{S}^* p_1^* \mathcal{H} \cong \mathcal{S}^* p_2^* \mathcal{H}$

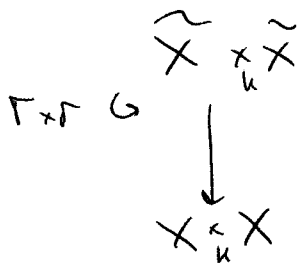


— замыкание вложения

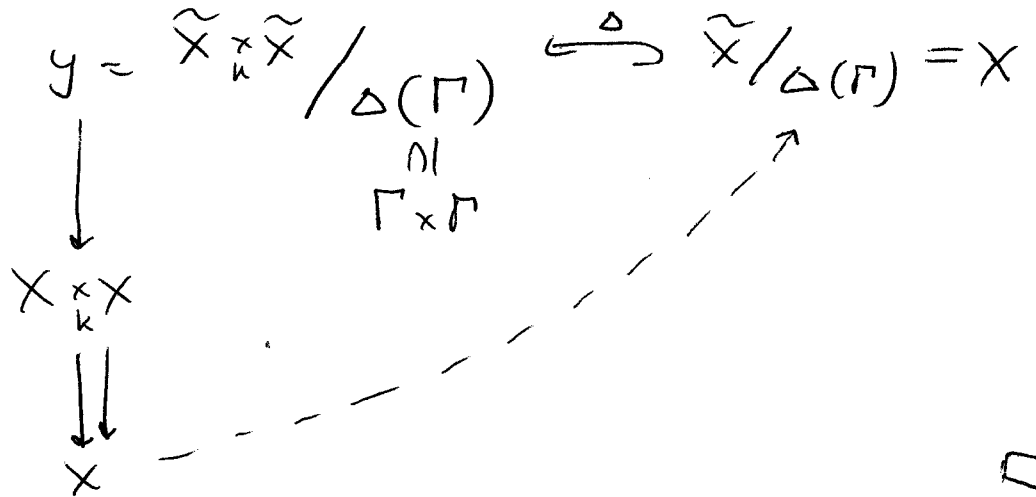


③ $\mathcal{S}^* \mathcal{H} \Big|_{s(X)} \cong \text{id}_{s(X)}$

Фон-во:



$$\Gamma = \text{Gal}(\tilde{X} \rightarrow X)$$



□

$$X := \text{Sp}(k[x^{\pm 1}])$$

Как вывести его конечные étальные расширения?

Ответ: $\text{Spec}(k'[y^{\pm 1}])$, где k'/k — кон. сеп. расширение

Любая нед. группа G/X рассматривается над конечным étальным расширением, если $k = \bar{k}$, то над $k[y^{\pm 1}]$,

$$\begin{array}{ccc} k[x^{\pm 1}] & \longrightarrow & k[y^{\pm 1}] \\ x & \longmapsto & y^d \end{array} \quad (\text{Хиль-Пикарса})$$

— верно и для $k[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$

Применяем лемму Пикара о выравнивании

$$X = \text{Spec}(k[x^{\pm 1}])$$

$$X \times_k X = \text{Spec}(k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}])$$

$$\begin{array}{c} p_1 \downarrow \downarrow p_2 \\ X \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \uparrow \\ X \text{Spec}(k[x^{\pm 1}]) \end{array}$$

$$k \text{ — а.з. поле } \rightsquigarrow k = k' \rightsquigarrow \tilde{X} \times \tilde{X} \text{ связно}$$

\rightsquigarrow можем построить Y для $G =: H, H := \text{Aut}(G)$

□ S

$$\curvearrowright Y = \text{Spec } k[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]$$

$$g^*: k[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}] \longrightarrow k[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]$$

$$\begin{array}{c} \rho_1^* \nearrow \\ \rho_2^* \nearrow \\ k[x^{\pm 1}] \end{array}$$

инъективный гомоморфизм колец,
поскольку g этакво

$$S^*(g^*(x)) = x$$

$$S^*(g^*(y)) = x$$

Пусть $g^*(x) = z_1^u z_2^v$

$$S^*(z_1) = x^a \quad S^*(z_2) = x^b$$

$$\curvearrowright x^{ua} \cdot x^{vb} = x \quad \curvearrowright ua + vb = 1$$

Заметим z_1 на $z_1^u z_2^v$, z_2 на $z_1^{-b} z_2^a$

Тогда $g^*(x) = z_1$, $S^*(z_1) = x$, $S^*(z_2) = 1$

$$S^*(g^*(y)) = x = S^*(z_1)$$

$$\Rightarrow g^*(y) = z_1 z_2^d$$

Заметим z_2 на z_2^{-1} , если $h=d \sim d < 0$

($d \neq 0$, т.ч. g^* инъективно)

$$K_1^G(k[x^{\pm 1}]) \longrightarrow K_1^G(k((x)))$$

инъекция, т.ч. это сечение

$$g^* \circ \rho_1^* \int_{z_1}^x \quad \int_{z_2}^y \quad \rho_2^* \circ g^*$$

$$t z_2^{-d} = z_1 \int_{z_2}^x \int_{z_2}^y \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{t} x^{1-d} \\ \xrightarrow{z_2} x \end{array}$$

$$K_1^{G_y}(k[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]) \hookrightarrow K_1^{G_y}(k[t^{\pm 1}][[z_2]])$$

$$k[t^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]$$

$$z_1 = t z_2^{-d}$$

G_y определено над $k[t^{\pm 1}]$

\Rightarrow это инъекция

\curvearrowright верхнее — инъекция