03.07.2013

А. Ставрова

Изотропные группы над кольцом многочленов Лорана

$R_n = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, k — поле

G/R_n такие группы связаны с группами Кац-Муди

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая расщепимая алгебра Ли (алг. Шевалле)

Аффинная алгебра Кац-Муди — это скрученная форма алгебры $\underbrace{((\mathfrak{g} \otimes_k k[t^{\pm 1}]) \oplus kc)}_{} \rtimes k\delta$

аффинная алгебра Ли

скобка Ли определяется хитро: на kc она связана с формулой Киллинга

дифференцирование, продолжающее $t\frac{d}{dt}$

все это — аффинная алгебра Кац-Муди

Можно обобщить на $k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$

$\mathfrak{g} \otimes k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$ — multiloop algebra

+новесить слагаемые $\rightsquigarrow$ extended affine Lie algebra

Группы Кац-Муди и multi loop groups

- почти что группы точек $G(k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}])$, G — п/п алг.гр., если они расщепимы.

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Черноусов — Жиль — Пиянсола) 2008, 2011

1) Пусть G — ред.гр.схема над k, char k — „хорошая"

Тогда $H^1_{\acute{e}t}(k[t^{\pm 1}], G) \xrightarrow{\simeq} H^1_{\acute{e}t}(\underbrace{k((t))}_{\text{ряды Лорана}}, G)$

2) Пусть G — групповая схема Шевалле-Демазюра

$H^1_{\acute{e}t}(k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}], G)_{toral} \longrightarrow H^1_{\acute{e}t}(k((t_1))\ldots((t_n)), G)$

т.е. соответствующая скруч. группа имеет максимальный тор

$\boxed{\text{Теорема}}$ (ч * П, 2011)

G — односвязная полупростая изотропная группа над $R_n = k[t_1^{\pm1}, \dots, t_n^{\pm1}]$

Тогда $K_1^G(R_n) \longrightarrow K_1^G(F_n)$, $F_n = k((t_1))\dots((t_n))$

т.е. $G(F_n) = G(R_n)E(F_n)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Ставрова)

G/R_n — односвязная полупростая группа, k — алг. замкнуто, $\operatorname{rk} G \geq 2$. Тогда $K_1^G(R_n) \cong K_1^G(F_n)$

$\boxed{NB}$ $Br(\mathbb{C}[t_1^{\pm1}, \dots, t_n^{\pm1}]) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{C_n^2}$

$\boxed{\text{Лемма 1}}$

Пусть A — комм. кольцо, G/A — ред. группа, $\operatorname{rk} G \geq 2$

Тогда $E(A((t))) = E(A[[t]])\,E(A[t, t^{-1}])$

Док-во: Достаточно показать, что

$$\underline{X_\alpha(t^{-k} v)}\, E(A[[t]]) \subseteq E([[t]])\, E(A[t, t^{-1}])$$

$$X_\alpha\Big(v \otimes \sum_{i=-N}^{\infty} a_i t^i\Big) \in X_\alpha(V_\alpha \otimes_A A((t)))$$

$\beta \in \Phi_P$

$$[X_\alpha(t^{-k} v), X_\beta(t^{\ell} u)] = ? \quad \text{при } \ell \gg 0$$

а) $\alpha \nparallel \beta$

б) $\alpha \parallel \beta$

$v \in V_\alpha \qquad u \in V_\beta \otimes A[[t]]$

$$\underset{\substack{\cap \\ E(A[[t]])}}{X_\beta\Big(u \otimes \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\Big)} = X_\beta\Big(u \otimes \sum_{i \geq \ell} a_i t^i\Big)\, \underbrace{X_\beta\Big(u \otimes \sum_{i=0}^{\ell-1} a_i t^i\Big) \prod_{k>0} X_{k\beta}(\dots)}_{\in\, E(A[t, t^{-1}])}$$

а) $\alpha \nparallel \beta$ $\rightsquigarrow$ комм. формула Шевалле говорит, что при $l \gg 0$

$$N_{\alpha\beta ij}(t^{-k}v, t^{l}u) \in V_{i\alpha+j\beta} \otimes_A A[[t]]$$

б) $\alpha \parallel \beta$ $\rightsquigarrow$ Лемма 11 из [PS, 2008]

$\forall u \in A[[t]] \otimes_A V_\beta$ $\exists \gamma_i \in \Phi_\beta$, $\gamma_i \nparallel \beta$

$u_i \in V_{\gamma_i} \otimes_A A[[t]]$, $d_i > 0$ т.ч.

$$X_\beta(x^2 u) = \prod X_{\gamma_i}(x^{d_i} u_i)$$

$$[X_\alpha(t^{-k}v), \underbrace{X_\beta(t^{l}u)}_{=\prod X_{\gamma_i}(t^{Nd_i}u_i)}] \qquad l = 2N \gg 0$$

$$u_i \in V_{\gamma_i} \otimes A[[t]]$$

$\square$

Геометрическая интерпретация

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} A((t)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{G}_m \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} A[[t]] \arrow[r] & \mathbb{A}^1_A \end{tikzcd}$$

— декартов квадрат

— покрытие в fpqc-топ.

$$G(A[[t, t^{-1}]]) \cap G(A[[t]]) = G(A[t])$$

$\rightarrow K_1^G$ имеет склейку относ. к такому квадратику

$\boxed{\text{Теорема } 2}$ A — регулярное кольцо, содержащее беск. поле k. G/A — ред. группа: $\operatorname{irk} G \geq 2$. Тогда

$$K_1^G(A[t, t^{-1}]) \hookrightarrow K_1^G(A((t))).$$

Док-во $g \in \underbrace{E(A((t)))}_{= E(A[t^{\pm 1}])E(A[[t]])} \cap G(A[t, t^{-1}]) \overset{?}{\Rightarrow} g \in E(A[t, t^{-1}])$

$\to$ м. считать, что $g \in E(A[[t]]) \cap G(A[t,t^{-1}]) \subseteq G(A[t])$

По [Панин – Вавилов – Ставрова]
+ лок-глоб. принцип из [PS]
+ леммы из [Ставрова – $\mathbb{A}^1$-инв. K_1]

$$\boxed{\begin{gathered} G(A[[t]]) \\ \overset{?}{\|} \\ G(A)E(A[[t]]) \end{gathered}}$$

$$G(A[t]) = G(A)E(A[t])$$

$$\rightsquigarrow g \in \cancel{E(A[t]}\, G(A)E(A[t]) \cap E(A[[t]])$$

$$\underset{g_0 g_1}{\|} \qquad t=0 \rightsquigarrow g_0 \in E(A) \to g \in E(A[t])$$

□

<u>Док-во</u> Т1

k – алг. з. поле

$G/_{k[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]}$. Для простоты возьмем

$G/_{k[x^{\pm1}]}$, нужно д-ть, что $K_1^G(k[x^{\pm1}]) \hookrightarrow K_1^G(k((x)))$

$\boxed{\text{Лемма}}$ (Панин)

k – поле; $X/_k$ – гладкое неприводимое афф. многообразие

$H/_k$ – гладкая гр. схема, $\mathcal{H}$ – H-торсор над X, который расщепляется конечным накрытием Галуа $\tilde{X} \longrightarrow X$, и $\tilde{X} \times_k \tilde{X}$ связно.

Тогда $\exists\ Y \xrightarrow{\rho} X \times_k X$ – конечное этальное накрытие т.ч.

① $\rho^* p_1^* \mathcal{H} \overset{\Phi}{\cong} \rho^* p_2^* \mathcal{H}$

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X \\ X \end{tikzcd}$$

② $\exists$ сечение $s: X \longrightarrow Y$ – замкнутое вложение

общее сечение для $p_1\rho$ и $p_2\rho$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[dr, bend right, "\Delta"'] & Y \arrow[d, "\rho"] \\ & X \times_k X \end{tikzcd}$$

③ $\Phi|_{s(X)} = $ "$id_{\mathcal{H}}$"

$s(X) \cong X$

Док-во:

$$\begin{tikzcd} \Gamma\times\Gamma \curvearrowright & \tilde{X}\times_k\tilde{X} \arrow[d] \\ & X\times_k X \end{tikzcd}$$

$\Gamma = Gal(\tilde{X} \longrightarrow X)$

$$\begin{tikzcd} Y = \tilde{X}\times_k\tilde{X}/\Delta(\Gamma) \arrow[d] & \tilde{X}/\Delta(\Gamma) = X \arrow[l, hook', "\Delta"'] \\ X\times_k X \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \\ X \arrow[uur, dashed, bend right] & \end{tikzcd}$$

$\Delta(\Gamma) \subset \Gamma\times\Gamma$

$\square$

$X := Sp(k[x^{\pm1}])$

Как выглядят его конечные этальные расширения?

Ответ: $Spec(k'[y^{\pm1}])$, где k'/k – кон. сеп. расширение

Любая ред. группа G/X расщепляется над конечным этальным расширением; если $k=\bar{k}$, то над $k[y^{\pm1}]$,

где
$$\begin{aligned} k[x^{\pm1}] &\longrightarrow k[y^{\pm1}] \\ x &\longmapsto y^d \end{aligned}$$
(Жиль-Пиянсола)

– верно и для $k[x_1^{\pm1}, \ldots, x_n^{\pm1}]$

Применяем лемму Панина о выравнивании

$X = Spec(k[x^{\pm1}])$

$$\begin{tikzcd} X\times_k X \arrow[d, shift right, "p_1"'] \arrow[d, shift left, "p_2"] & = Spec(k[x^{\pm1}, y^{\pm1}]) \\ X & Spec(k[x^{\pm1}]) \arrow[u, shift right, "p_1^*"] \arrow[u, shift left, "p_2^*"'] \end{tikzcd}$$

$x \mapsto x$, $x \mapsto y$

k – а.з. поле $\rightsquigarrow k=k' \rightsquigarrow \tilde{X}\times\tilde{X}$ связно

$\rightsquigarrow$ можем построить Y для $G =: \mathcal{H}$, $H := Aut(G)$

$\rightsquigarrow \mathcal{Y} = \operatorname{Spec} k[z_1^{\pm1}, z_2^{\pm1}]$

$$\begin{tikzcd} k[x^{\pm1}, y^{\pm1}] \arrow[r, "\rho^*"] & k[z_1^{\pm1}, z_2^{\pm1}] \arrow[dl, bend left, "s^*"] \\ k[x^{\pm1}] \arrow[u, shift left, "p_1^*"] \arrow[u, shift right, "p_2^*"'] & \end{tikzcd}$$

инъективный гомоморфизм колец, поскольку ρ этально

$$s^*(\rho^*(x)) = x$$
$$s^*(\rho^*(y)) = x$$

Пусть $\rho^*(x) = z_1^u z_2^v$

$s^*(z_1) = x^a \qquad s^*(z_2) = x^b$

$\rightsquigarrow x^{ua} \cdot x^{vb} = x \rightsquigarrow ua + vb = 1$

Заменим z_1 на $z_1^u z_2^v$, z_2 на $z_1^{-b} z_2^a$

Тогда $\rho^*(x) = z_1$; $s^*(z_1) = x$, $s^*(z_2) = 1$

$s^*(\rho^*(y)) = x = s^*(z_1)$

$\Rightarrow \rho^*(y) = z_1 z_2^d$

Заменим z_2 на z_2^{-1}, если надо $\rightsquigarrow d < 0$

($d \neq 0$, т.к. ρ^* инъективно)

$$\begin{tikzcd} K_1^G(k[x^{\pm1}]) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\rho^* \circ p_1^*"', "x \mapsto z_1"] \arrow[d, shift left, "\rho^* \circ p_2^*", "x \mapsto z_2"'] & K_1^G(k((x))) \arrow[d, shift right, "x \mapsto t z_2^{-d} = z_1"'] \\ K_1^{G_y}(k[z_1^{\pm1}, z_2^{\pm1}]) \arrow[r, hook] & K_1^{G_y}(k[t^{\pm1}]((z_2))) \arrow[u, shift right, "t \mapsto x^{1-d},\ z_2 \mapsto x"'] \end{tikzcd}$$

инъекция, т.к. есть сечение

$= k[t^{\pm1}, z_2^{\pm1}]$

$z_1 = t z_2^{-d}$

по л. Панина группа одна и та же

G_y определено над $k[t^{\pm1}]$ $\Rightarrow$ это инъекция

$\rightsquigarrow$ верхнее — инъекция