Конструкция E_7 по эрмитовым формам с кватернионными алгебрами Клиффорда

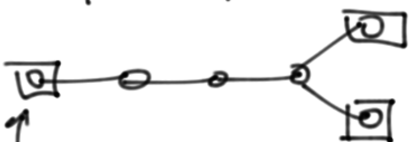
23.09.2013

В. Петров

F — поле, $\operatorname{char} F \neq 2$

Конструкция: h — эрмитова форма $\overset{\text{типа } D_6}{\rightsquigarrow}$ алг. Ли типа E_7

и все алгебры Ли типа E_7 так получаются с точностью до расширения нечетной степени

A  Q

алгебра с ортогональной инволюцией, над которой есть эрмитова форма

$(\deg A)\cdot(\text{ранг эрмитовой формы}) = 12$

$[A]=0 \longrightarrow$ 12-мерная квадратичная

$\operatorname{ind} A = 2 \longrightarrow$ 6-мерная над кватернионами

$\operatorname{ind} A = 4 \longrightarrow$ 3-мерная над бикватернионами

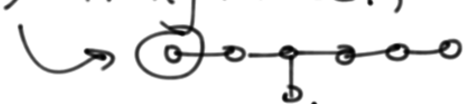
Требование: $\operatorname{ind} Q \leq 2$, Q — кватернионы

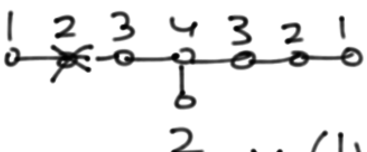
$[A]+[Q]$ — класс алгебры Титса E_7

ее индекс: 1, 2, 4, 8

Частные случаи: 1 строго внутренние группы типа E_7 получаются, когда $[A]=[Q]$

2 изотропные E_7 получаются, когда $[Q]=0$





$\longrightarrow$ В расщ. E_7^{ad} есть подгруппа типа D_6+A_1

$(SO_{12}\times SL_2)/\mu_2$

$v_2(|W(E_7)|)=v_2(|W(D_6+A_1)|)$

→ есть сюръекция на H^1 с точностью до расш. неч. ст.:

$$H^1(F, (SO_{12} \times SL_2)/\mu_2) \longrightarrow H^1(F, E_7^{ad})$$

$$1 \longrightarrow \mu_2 \longrightarrow (SO_{12} \times SL_2)/\mu_2 \longrightarrow PGO_{12}^+ \times PGL_2 \longrightarrow 1$$

внутренние группы типа D_6 кватернионы

Условие: класс алгебры Клиффорда равен [Q]

$Lie(E_7^{ad})$ — модуль над $Lie(D_6 + A_1)$

Относительно D_6 разложение такое: точнее, $Lie(L)$ Леви

$$Lie\, E_7 = V_{-2} \oplus V_{-1} \oplus Lie\, D_6 \oplus V_1 \oplus V_2$$

Возьмем эту градуировку mod 2 → $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-градуировка

четная степень превратится в $Lie(D_6 + A_1)$

нечетная степень — в $V_1 \otimes F^2$ ← ест. представление A_1

32-мерный $Lie(D_6)$-модуль

– полуспинорное представление $Lie(D_6)$

ev

↳ $Lie(D_6 + A_1)$ определена над базой

$V_1 \otimes F^2$ — простой модуль над алгеброй Клиффорда

odd

ev × ev ⟶ ev — скобка Ли в $D_6 + A_1$

ev × odd ⟶ odd — действие алгебры на модуле

odd × odd ⟶ ev: из $V_1 \times V_{-1} \longrightarrow Lie(L)$

$V \times V \times V \times V \longrightarrow F$

$V \times V \longrightarrow F$

$\rightsquigarrow V \times V \longrightarrow End(V)$

Частный случай: $[A]=[Q]$ → строго внутренние группы
h — 6-мерная эрмитова форма над Q с тривиальной алгеброй Клиффорда (другой): $C_0^+ = Q$
$C_0^- = 0$

$$H^1(F, \mu_2) \longrightarrow H^1(F, E_7^{sc}) \longrightarrow H^1(F, E_7^{ad})$$

есть инвариант Роста $H^1(F, E_7^{ad}) \longrightarrow H^3(F, \mathbb{Z}/4)$
Над $F(SB(Q))$ он равен инварианту Арасона квадратичной формы $h_{F(SB(Q))}$
12-мерные квадратичные формы из I^3 определяются своим инвариантом Арасона с точностью до подобия

$\boxed{\text{Теорема}}$ Dejaiffe — Parimala

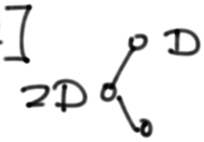
W(Q-эрмитовы формы) $\longrightarrow$ W($F(SB(Q))$-кв. формы)
переход на $F(SB(Q))$
инъективно

$\boxed{\text{Гипотеза}}$ Верно то же для подобия форм.

Если эта гипотеза верна, то инвариант Роста (на E_7^{ad}) инъективен (mod 2)
на $\operatorname{Im} H^1(F, E_7^{sc})$ в $H^1(F, E_7^{ad})$

До 1980-х не было известно, $\exists$ ли анизотропные группы типа E_7 с трив. алгеброй Титса
~1985 Allison — первый пример
1990 Tits — второй пример
над $\mathbb{Q}(t)$

Пусть D — тело индекса 4 и экспоненты 4
$\mu \in F^*$ — константа
построим группу по D и μ:

$2[D]=[Q]$  3-мерная эрмитова над Q: g

Рассмотрим

$h = g - \mu g = \langle\langle \mu \rangle\rangle \otimes g$ — 6-мерная над Q

и одна алгебра Клиффорда тривиальна

$\rightsquigarrow$ наша конструкция дает E_7

Как понять, изотропна она или нет?

Очевидно, что инвариант Роста равен

$[D]\cup(\mu) + [Q]\cup(\alpha)$

если g заменить на αg, то второе слагаемое пропадет: инв. Роста равен $[D]\cup(\mu)$

можно сделать, чтобы он был 4-кручением

(а у изотропных д. быть 2-кручение): если $\mu = t$, то порядок $[D]\cup(t)$ равен $\exp(D) = 4$