Теорема Милнора, стабилизация для K_0, K_1 $\boxed{02.10.2013}$

С. Синчук

A — комм. кольцо с 1

$$0 \to \widetilde{K}_0(A) \to K_0(A) \xrightarrow{rk} H_0(A) \to 0$$

$H_0(A) = \{Spec(A) \to \mathbb{Z}\}$ лок. пост.

$rk\, P = r$, $P \in \widetilde{K}_0(A)$, $\det: \widetilde{K}_0(A) \to Pic(A)$, $P \mapsto \Lambda^r P$

$P_r(A)$ = мн-во классов изоморфизма к.п. A-модулей пост. ранга r

$$s_r: P_r(A) \to P_{r+1}(A)$$
$$P \mapsto P \oplus A$$
$$t_r: P_r(A) \to \widetilde{K}_0(A)$$
$$P \mapsto [P] - [A^r]$$

Замечание: $\varinjlim_{\substack{s_r \\ r\to\infty}} P_r(A) \cong \widetilde{K}_0(A)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ „5 определений стабилизации"

- surjective K_0-range $\leq n$: $\xrightarrow{s_r} \twoheadrightarrow$
- injective K_0-range $\leq n$: $\xrightarrow{s_r} \hookrightarrow$

$\max(\cdot,\cdot) =: K_0$-range

- stable K_0-range $\leq n$: $\xrightarrow{t_r} \twoheadrightarrow$
- ind. proj $\leq n$: $\forall$ проект. $P \cong \bigoplus P_i$ ← ранга $\leq n$
- stable ind. proj $\leq n$: $\forall$ проект. P стабильно изоморфен сумме $\bigoplus P_i$ ← ранга $\leq n$

$\Updownarrow$

$\mathrm{Im}\, t_n$ аддитивно порождает $\widetilde{K}_0(A)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & K_0\text{-range} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
 & \text{surj } K_0\text{-range} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{inj } K_0\text{-range} \\
\text{stable } K_0\text{-range} \arrow[dr, Rightarrow] & \text{ind-proj}(A) \arrow[d, Rightarrow] & & \\
 & \text{stable ind-proj}(A) & &
\end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Замечания}}$ ① K_0-range $=0 \iff$ все кон.пор.проект.модули пост.ранга свободны $\iff$ surj K-range $=0$

② surj K_0-range $\leq 1 \iff K_0$-range $\leq 1 \iff$ $(\mathrm{rk}\, P, \det P) \in H_0(A) \times \mathrm{Pic}(A)$ — complete isomorphism invariant

$\rightsquigarrow \det : \widetilde{K}_0(A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Pic}(A)$

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Bass, Ch IV, Cor 2.7 & Cor 3.5)

$\text{max-spec}(A) = \bigcup X_i \implies K_0\text{-range} \leq d$

(конечное объед; $\dim X_i < d$

$\delta(A)$ — разм. Басса-Серра

т. Серра: P-проект.модуль ранга $\geq d \implies P = P' \oplus A$

т. Басса-Шануэля: P, P' — проект. ранга $\geq d+1$

$P \oplus Q = P' \oplus Q \implies P \simeq P'$

$\mathrm{sr} A - 1 \leq \mathrm{asr} A - 1 \leq \delta A \leq \dim \mathrm{Max}\, A \leq \dim \mathrm{Spec}\, A$

задача: д-ть т. Басса-Шануэля для sr

?-связность $GL_{n+1}/GL_n \xrightarrow[M,W]{}$ стабилизация для $KV_?^{GL_n}$

Стаб. для $\dfrac{GL_n(R)}{GL_n(R[t])} \to \dfrac{GL_{n+1}(R)}{GL_{n+1}(R[t])}$

т. Милнора (1968)

$\alpha \in$

$\alpha g = \alpha(1)\, g\, \alpha(0)^{-1}$

K_0-стабилизация

$\boxed{\text{Пр.}}$ $T \dashv S$

адд. категории

$$\underline{\underline{A}} \underset{S}{\overset{T}{\rightleftarrows}} \underline{\underline{B}}$$

$$\alpha_A : A \xrightarrow{\sim} STA$$

$$\beta_B : TSB \to B$$

Пусть α_A — изоморфизм, B — прямое слагаемое TA

$\Rightarrow \beta_B : TSB \xrightarrow{\simeq} B$

Д-во: $\beta : TS \to Id_{\underline{B}}$ — ест. преобразование адд. ф-ров

$\beta_{TA} \circ T\alpha_A = id_{TA}$ $\square$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Пусть $T \dashv S$, $\alpha : 1_{\underline{A}} \to ST$ — изо, $B \in \underline{\underline{B}}$ изоморфно прямому слагаемому TA для нек. $A \in \underline{\underline{A}}$

$\Rightarrow \beta : TS \to 1_{\underline{B}}$ — изо, и S, T - вз.обр. экв-сти.

Расслоения категорий

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_2 \arrow[d] \\ A_1 \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

$$A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid f_1(a_1) = f_2(a_2)\}$$

$$\begin{tikzcd} \underline{\underline{P}}(A) \arrow[r, "H_2 = -\otimes A_2"] \arrow[d, "H_1 = -\otimes A_1"'] \arrow[dr, dashed] & \underline{\underline{P}}(A_2) \arrow[d] \\ \underline{\underline{P}}(A_1) \arrow[r] & \underline{\underline{P}}(A) \end{tikzcd} \qquad p \to \underline{\underline{P}}(A_2), \quad p \to \underline{\underline{P}}(A_1)$$

$$\beta : (-\otimes_A A_1)\otimes_{A_1} A' \cong -\otimes_{A_1} A' \cong (-\otimes_A A_2)\otimes_{A_2} A'$$

Конструкция P:

$$\mathrm{Obj}\, P = \{(P_1, \alpha, P_2) \mid P_i \text{ — проект. } A_i\text{-модуль}; \ \alpha: P_1 \otimes A' \to P_2 \otimes A'\}$$

$$P((P_1,\alpha,P_2),(Q_1,\beta,Q_2)) = \{(f_1,f_2) \in \underline{P}(A_1)(P_1,Q_1) \times \underline{P}(A_2)(P_2,Q_2) \mid \quad \}$$

$$\begin{tikzcd}
P_1 \otimes A' \arrow[r] \arrow[d] & P_2 \otimes A' \arrow[d] \\
Q_1 \otimes A' \arrow[r] & Q_2 \otimes A'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "G_2"] \arrow[d, "G_1"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha \Nearrow"] & \underline{P}(A_2) \arrow[d, "F_2"] \\
\underline{P}(A_1) \arrow[r, "F_1"'] & \underline{P}(A')
\end{tikzcd}$$

$G_i: (P_1, \alpha, P_2) \mapsto P_i$

$F_1 G_1 \xrightarrow{\alpha} F_2 G_2$

$(P_1, \alpha, P_2) \mapsto \alpha$

Пусть $B \in \underline{P}(A) \rightsquigarrow T(B) = (H_1(B), \beta_B, H_2(B))$

$\boxed{\text{т. Милнора}}$ Если f_1 или f_2 — сюръекция, то T — экв-сть категорий

Пример $GL_n(A) / GL_n(A[t]) \cong$ {классы изоморфизма проект. модулей ранга n над SA т.ч. $P \otimes_{SA} A[t] \cong A[t]^n$, $P \otimes_{SA} A \cong A^n$}

Перейдем от $\underline{P}$ к $\underline{\underline{M}}$ ← кон. пор. модули

$$\begin{tikzcd}
\text{mod-}A \arrow[dr, bend left, "T"] \arrow[drr, bend left, "H_2"] \arrow[ddr, bend right, "H_1"'] & & \\
& \underline{\underline{M}} \arrow[ul, bend left, "S"] \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\underline{M_2}} \arrow[d] \\
& \underline{\underline{M_1}} \arrow[r] & \underline{\underline{M'}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S(M) \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] \\
M_1 \arrow[r] & F_1 M_1 \xrightarrow[\alpha_M]{\sim} F_2 M_2
\end{tikzcd}$$

$S(M)=\{(x_1,x_2)\in M_1\times M_2 \mid \alpha_M(x_1\otimes 1)=x_2\otimes 1\}$

несет A-mod структуру: покомпонентно:

$$(a_1,a_2)\cdot(x_1,x_2)=(a_1x_1,\ a_2x_2)$$

$$\mathrm{Hom}_A(N,S(M))\cong \mathrm{Hom}_A(N,M_1)\times_{\mathrm{Hom}_A(N,F_2M_2)}\mathrm{Hom}_A(N,M_2)$$

$$\mathrm{Hom}_A(N,M_i)\cong \mathrm{Hom}_{A_i}(H_iN,M_i)$$

$$\cong\ \mathrm{Hom}_{A_1}(H_1N,M_1)\times_{\mathrm{Hom}_{A'}(F_1H_1N,F_2M_2)}\mathrm{Hom}_{A_2}(H_2N,M_2)$$

$$\cong\ \{(h_1,h_2)\mid \alpha_M(h_1\otimes A')=h_2\otimes A'\}=\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{M}}}(TN,M)$$

$\rightsquigarrow$ функторы T и S сопряжены

Ввиду Леммы достаточно доказать

$\boxed{\text{Утв.}}$ $\forall U\in\underline{\underline{P}}\ \exists V\in\underline{\underline{P}}\ \exists P\in\underline{\underline{P}}(A):\ U\oplus V\cong TP$ „кофинальность"

$\rightsquigarrow$ здесь нужно использовать, что f_1 или f_2 — сюръекция

$\phi_N: N\longrightarrow STN$ — изо. для $N=A$

$\rightsquigarrow \forall P\in\underline{\underline{P}}(A)$