

Теорема Милнора, стабилизация для K_0, K_1

02.10.2013

С. Синчук

A — комм. кольцо с 1

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \widetilde{K}_0(A) & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{zk} & H_0(A) \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \text{rk} & & \downarrow \text{det} & & & & \uparrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Spec}(A) \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \text{лок. пост.} \end{array} \right\} \\
 \Lambda^2 P & & \text{Pic}(A) & & & &
 \end{array}$$

$P_r(A)$ = мн-во классов изоморфизма к.л A -модулей
 пост. ранга r

$$S_r: P_r(A) \longrightarrow P_{r+1}(A)$$

$$P \longmapsto P \oplus A$$

$$t_r: P_r(A) \longrightarrow \widetilde{K}_0(A)$$

$$P \longmapsto [P] - [A^r]$$

Замечание: $\varinjlim_{S_r} P_r(A) \cong \widetilde{K}_0(A)$
 $r \rightarrow \infty$

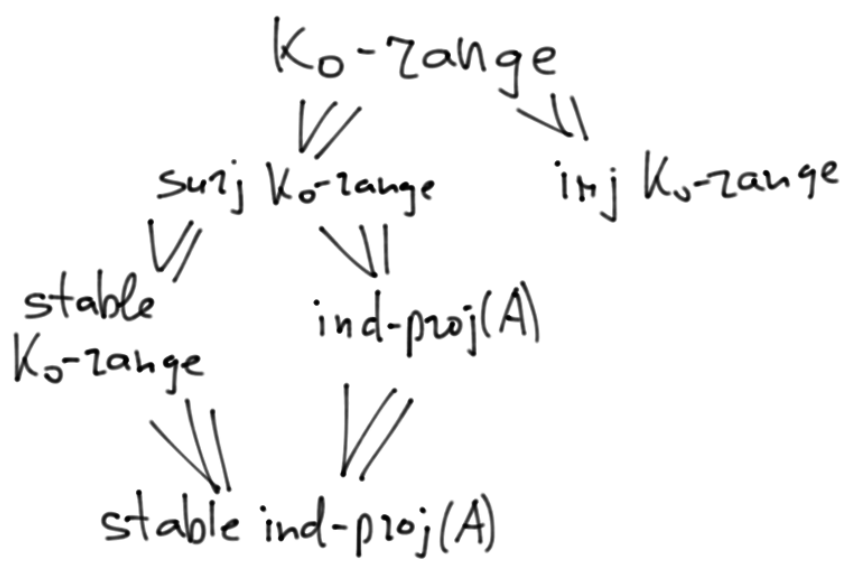
Опр. „5 определений стабилизации“

- surjective K_0 -rangesi: $\xrightarrow{S_r}$
- injective K_0 -rangesi: $\xrightarrow{S_r}$
- stable K_0 -rangesi: $\xrightarrow{t_r}$
- ind. projesi: \forall проект. $P \cong \bigoplus P_i$
- stable ind. projesi: \forall проект. P стабильно изоморфен сумме $\bigoplus P_i$

← ранга $\leq n$



Im t_n аддитивно порождает $\widetilde{K}_0(A)$ ← ранга $\leq n$



Замечания (1) $K_0\text{-rang} = 0 \Leftrightarrow$ все кон. н.пр. проект. модули ранга 0 свободны $\Leftrightarrow \text{surj } K_0\text{-rang} = 0$
 (2) $\text{surj } K_0\text{-rang} \in 1 \Leftrightarrow K_0\text{-rang} \in 1 \Leftrightarrow$
 $(\mathbb{Z}K^*, \det P) \in H_0(A) \times \text{Pic}(A)$ — complete isomorphism invariant
 $\rightsquigarrow \det: \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{\cong} \text{Pic}(A)$

Теорема (Bass, Ch IV, Cor 2.7 & Cor 3.5)
 $\text{max-spec}(A) = \bigcup X_i \implies K_0\text{-rang} \leq d$
 (конечное объедин.; $\dim X_i \leq d$)
 $\delta(A)$ — разн. Басса-Серра

т. Серра: P -проект. модуль ранга $\geq d \implies P = P' \oplus A$

т. Басса-Шанюэля: P, P' -проект. ранга $\geq d+1$

$$P \oplus Q = P' \oplus Q \implies P \simeq P'$$

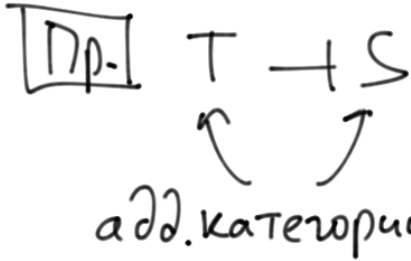
$$s_2 A - 1 \leq a s_2 A - 1 \in \delta A \leq \dim \text{Max } A \leq \dim \text{Spec } A$$

задача: 2-76 т. Басса-Шанюэля для s_2

?-связность $GL_{n+1}/GL_n \xrightarrow{M, W}$ стабилизация для KV_{GL_n} ?

Т. Милнора (1968) Стаб. для $\frac{GL_n(R)}{GL_n(R[t])} \rightarrow \frac{GL_{n+1}(R)}{GL_{n+1}(R[t])}$
 $\alpha \in GL_n(R[t]) \quad \alpha g = \alpha(1)g\alpha(0)^{-1}$

Ко-стабилизация



$$\underline{A} \xrightleftharpoons[S]{T} \underline{B}$$

$$\alpha_A: A \xrightarrow{\sim} STA$$

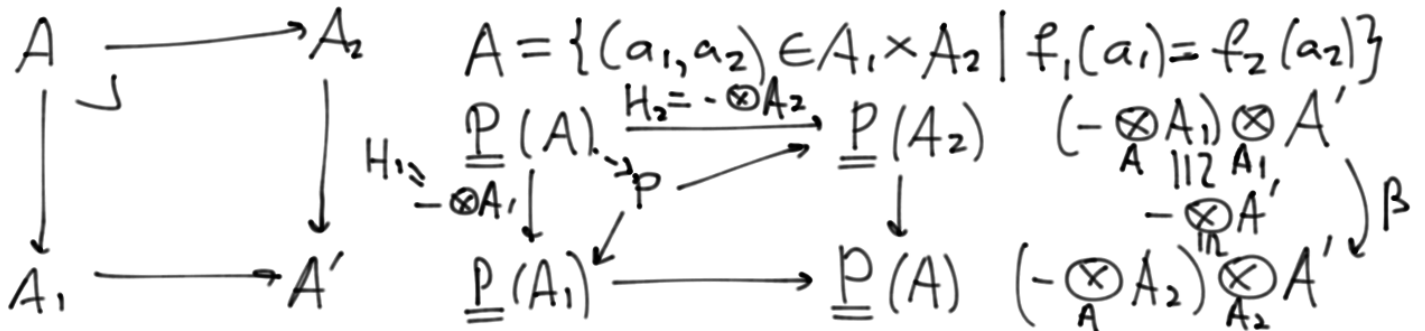
$$\beta_B: TSB \rightarrow B$$

Пусть α_A — изоморфизм, B — прямое слагаемое TA
 $\Rightarrow \beta_B: TSB \xrightarrow{\cong} B$

Ф-во: $\beta: TS \rightarrow Id_B$ — ест. преобразование адд. ф-ров
 $\beta_{TA} \circ T\alpha_A = id_{TA}$ □

Следствие Пусть $T \dashv S$, $\alpha: \underline{1}_A \rightarrow ST$ — изо,
 $\beta \in \underline{B}$ изоморфно прямому слагаемому TA для нек. $A \in \underline{A}$
 $\Rightarrow \beta: TS \rightarrow \underline{1}_B$ — изо, и S, T — взобр. эив-сти.

Расслоения категории



Конструкция P:

$$\text{Obj } P = \{ (P_1, \alpha, P_2) \mid P_i - \text{проект. } A_i - \text{модуль; } \alpha: P_1 \otimes A' \rightarrow P_2 \otimes A' \}$$

$$P((P_1, \alpha, P_2), (Q_1, \beta, Q_2)) = \{ (f_1, f_2) \in \underline{P}(A_1)(P_1, Q_1) \times \underline{P}(A_2)(P_2, Q_2) \}$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{G_2} & \underline{P}(A_2) \\ G_1 \downarrow & \nearrow \alpha & \downarrow F_2 \\ \underline{P}(A_1) & \xrightarrow{F_1} & \underline{P}(A') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G_i: (P_1, \alpha, P_2) & \mapsto & P_i \\ F_1 G_1 & \xrightarrow{\alpha} & F_2 G_2 \\ (P_1, \alpha, P_2) & \mapsto & \alpha \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P_1 \otimes A' & \longrightarrow & P_2 \otimes A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 \otimes A' & \longrightarrow & Q_2 \otimes A' \end{array}$$

Пусть $B \in \underline{P}(A) \rightsquigarrow T(B) = (H_1(B), \beta_B, H_2(B))$

т. Милнора Если f_1 или f_2 - сюръекция, то

T — экв-сть категорий

Пример

$$\text{GL}_n(A) / \text{GL}_n(A[[t]])$$

$$\cong \left. \begin{array}{l} \text{классы изоморфизма} \\ \text{проект. модулей ранга } n \\ \text{над } SA \text{ т.ч.} \\ P \otimes_{SA} A[[t]] \cong A[[t]]^n \\ P \otimes_{SA} A \cong A^n \end{array} \right\}$$

Перейдем от \underline{P} к \underline{M} ← кон. непр. модули

$$\begin{array}{ccc} \text{mod-}A & \xrightarrow{H_2} & \\ \downarrow H_1 & \nearrow \tau & \downarrow \sigma \\ \underline{M} & \xrightarrow{\quad} & \underline{M}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \underline{M}_1 & \xrightarrow{\quad} & \underline{M}' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S(M) & \longrightarrow & M_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \xrightarrow{F_1} & M_1 \xrightarrow{F_2} M_2 \end{array}$$

$$S(M) = \{ (x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \mid d_M(x_1 \otimes 1) = x_2 \otimes 1 \}$$

несет A -мод структуру: покомпонентно:

$$(a_1, a_2) \cdot (x_1, x_2) = (a_1 x_1, a_2 x_2)$$

$$\text{Hom}_A(N, S(M)) \cong \text{Hom}_A(N, M_1) \times_{\text{Hom}_A(N, F_2 M_2)} \text{Hom}_A(N, M_2)$$

$$\text{Hom}_A(N, M_i) \cong \text{Hom}_{A_i}(H_i N, M_i) \quad \parallel \parallel$$

$$\text{Hom}_{A_1}(H_1 N, M_1) \times_{\text{Hom}_{A'}(F_1 H_1 N, F_2 M_2)} \text{Hom}_{A_2}(H_2 N, M_2)$$

$$\{ (h_1, h_2) \mid d_M(h_1 \otimes A') = h_2 \otimes A' \} = \text{Hom}_{\underline{M}}(TN, M)$$

\rightsquigarrow функторы T и S сопряжены

Ввиду леммы достаточно доказать

$$\boxed{\text{Утв.}} \quad \forall U \in \underline{P} \exists V \in \underline{P} \exists P \in \underline{P}(A) : U \oplus V \cong TP$$

"кофундальность"

\rightsquigarrow здесь нужно использовать, что f_1 или f_2 — сюръекция

$$\varphi_N : N \longrightarrow STN \text{ — изом. для } N = A$$

$$\rightsquigarrow \forall P \in \underline{P}(A)$$