15.11.2013

В.Петров

Группы типа E_7, кватернионы и проективная плоскость над $\mathbb{F}_2$

Цель: описать $H^1(F, E_7^{ad}) = \{$классов изоморфности алгебр Ли типа E_7 над $F\}$

$$\uparrow$$

$H^1(F, E_7^{sc}) = \{$классов изотопности алгебр Брауна над $F\}$

F – поле

$\operatorname{char} F \neq 2$

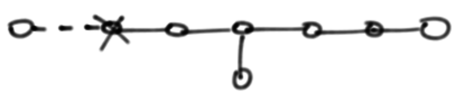
здесь E_7^{sc} = односвязная группа Шевалле типа E_7

E_7^{ad} = присоединенная —//— = Aut(расщепимая типа E_7)

$H \leq E_7^{ad} \rightsquigarrow H^1(F,H) \longrightarrow H^1(F, E_7^{ad})$

Хочется найти удобную H

Рассматриваем F с точностью до расширений неч. степени

 $\rightsquigarrow$ внутри E_7 живет $D_6 + A_1$

точнее: внутри E_7^{sc} живет $(Spin_{12} \times SL_2)/\mu_2$

внутри E_7^{ad} живет $(HSpin_{12} \times SL_2)/\mu_2$

$$H^1(F, (HSpin_{12} \times SL_2)/\mu_2) \twoheadrightarrow H^1(F, E_7^{ad})$$

— с точностью до расширений неч. степени,

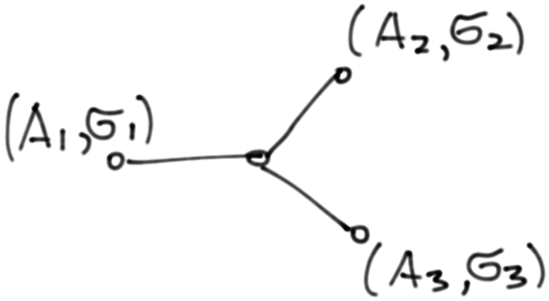
поскольку $\dfrac{|W(E_7)|}{|W(D_6)| \cdot |W(A_1)|}$ нечетно

Продолжим процесс:  $\rightsquigarrow D_6 \supseteq D_4 + \overbrace{A_1 + A_1}^{D_2}$

$$H^1(F, (Spin_8\times SL_2\times SL_2)/\mu_2) \longrightarrow H^1(F, Spin_{12})$$

Внутри скрученной формы E_7^{ad} живет группа типа $D_4+A_1+A_1+A_1$

- Группы типа D_4
  - алгебра степени 8 с орт. инволюцией (3 штуки)



- три алгебры кватернионов

Q_1, Q_2, Q_3

$$[A_1] = [Q_2] + [Q_3]$$

$$[A_2] = [Q_1] + [Q_3]$$

$$[A_3] = [Q_1] + [Q_2]$$

Алгебра Ли: $sl_1(Q_1)\oplus sl_1(Q_2)\oplus sl_1(Q_3)\oplus Lie(D_4)$

(+ф. Киллинга) $(A_1,\sigma_1)\otimes(Q_2,{}^-)\otimes(Q_3,{}^-)$ - модуль (32)

$(A_2,\sigma_2)\otimes(Q_1,{}^-)\otimes(Q_3,{}^-)$ - модуль

$(A_3,\sigma_3)\otimes(Q_1,{}^-)\otimes(Q_2,{}^-)$ - модуль

$$3+3+3+28+32+32+32 = 133$$

$H^1(F,\mu_2^2)$ действует на $H^1(F,E_7^{ad})$

Алгебра степени 56:

$$(Q_1,-)\otimes(Q_2,-)\otimes(Q_3,-)$$

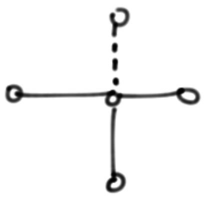
$$\boxplus(A_1,\sigma_1)\otimes(Q_1,-)\boxplus(A_2,\sigma_2)\otimes(Q_2,-)\boxplus(A_3,\sigma_3)\otimes(Q_3,-)$$

$$8+16+16+16=56$$

$[Q_1]+[Q_2]+[Q_3]=$ класс алгебры Титса

$$\mathrm{Cliff}_0(A_1,\sigma_1)\cong(A_2,\sigma_2)\otimes(A_3,\sigma_3)$$

предположим, что этот класс $=0$

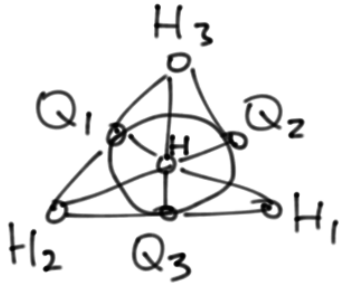


Внутри D_4 живет $A_1+A_1+A_1+A_1$

$$(A_1,\sigma_1)=(H_2,-)\otimes(H_3,-)\boxplus(H_1,-)\otimes(H,-)$$

$$(A_2,\sigma_2)=(H_1,-)\otimes(H_3,-)\boxplus(H_2,-)\otimes(H,-)$$

$$(A_3,\sigma_3)=(H_1,-)\otimes(H_2,-)\boxplus(H_3,-)\otimes(H,-)$$



$$(V,f),\ (W,g)\rightsquigarrow(V\oplus W,\ f\perp g)$$

$$(\mathrm{End}(V),\sigma),\ (\mathrm{End}(W),\tau)$$

$$\downarrow$$

$$(\mathrm{End}(V)\boxplus\mathrm{End}(W),\ \sigma\boxplus\tau)$$

$H^1(F,7A_1)\longrightarrow H^1(F,E_7^{sc})$ сюръективно с точностью до расширений нечетной степени.

($H^1(F,\mu_2^4)\leftrightarrow 4$ константы)

Алг. Ли: $\bigoplus_{i=1}^{7}\mathfrak{sl}(Q_i)\oplus\bigoplus(Q_i\otimes Q_j\otimes Q_k\otimes Q_l$ – модуль)

$\forall(i,j,k,l)$ – доп. к прямой

$$7\cdot 3+7\cdot 16=133$$

56-мерное представление:

$$\bigoplus_{\{i,j,k\}\text{ - прямая}} Q_i \otimes Q_j \otimes Q_k$$

$Q_i = \left(\frac{a_i, b_i}{F}\right) \longleftrightarrow$ 2-пфистерова форма $\langle\langle a_i, b_i \rangle\rangle$

$e_3\left(\sum \langle\langle a_i, b_i \rangle\rangle\right) = 2r(E_7)$ — делится на каждую из $\langle\langle a_i, b_i \rangle\rangle$

Задача: явно посчитать форму Киллинга