22.01.2014

А. Перепечко

k – а.з. поле хар-ки 0 (хотя не очень обязательно)

X аффинное нормальное многообразие, $\dim X \geq 2$

Опр. Дифференцирование ∂ на $\mathcal{O}(X)$ называется <u>локально нильпотентным</u>, если $\forall f \in \mathcal{O}(X)\ \exists n : \partial^n(f) = 0$ (ЛНД)

Опр. $\mathbb{G}_a = \mathbb{G}_a(k)$; <u>$\mathbb{G}_a$-действие:</u> $H : \mathbb{G}_a \times X \longrightarrow X$

ЛНД $\longleftrightarrow$ $\mathbb{G}_a$-действия

$$\partial \rightsquigarrow \exp(t\partial) f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i \partial^i(f)}{i!}$$

(Kevin Langlois)

$\mathrm{char}\, k > 0 \rightsquigarrow$ LFIHD : $\partial = \{\partial^1, \ldots, \partial^n, \ldots\}$

$$\exp(t\partial) = \sum t^i \partial^i(f)$$

Опр. $\mathcal{U} \subseteq X$ – <u>цилиндр</u>, если $\mathcal{U} \simeq \mathbb{A}^1 \times Z$

$\mathcal{U}$ – откр., Z – афф.

Цилиндр $\mathcal{U}$ <u>главный</u>, если $X \setminus \mathcal{U} = \mathrm{div}(f)$, $f \in \mathcal{O}(X)$

ЛНД $\longleftrightarrow$ $\mathbb{G}_a$-действия $\longleftrightarrow$ главные цилиндры

(с точн. до const)

нетрив. орбиты размерности 1 $\longleftrightarrow$ $\mathbb{A}^1$-слои

∂ – дифф., $h \in \mathrm{Ker}\,\partial^2 \setminus \mathrm{Ker}\,\partial \rightsquigarrow g = \partial h \in \mathrm{Ker}\,\partial$,

$s = \frac{g}{h} \in k(X) \rightsquigarrow \partial(s) = 1$

Теорема о слайсе: $\exists \mathcal{U} : \mathcal{O}(\mathcal{U}) \simeq (\mathrm{Ker}\,\partial)[s]$

слои: $g = \mathrm{const}$

$X \setminus \mathcal{U} = \mathrm{div}(g)$

Обратно: $U = \mathbb{A}^1 \times Z \to \mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(Z)[s]$, $\partial = \frac{\partial}{\partial s}$

$\operatorname{div}(f) = X \setminus U$, f инв-на отн-но ∂; $\partial' = f^N \partial$

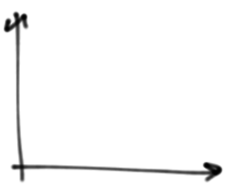
$\to \partial'$ – ЛНД на X

Пусть ∂ – ЛНД

1. $\operatorname{Ker} \partial$ – область целостности
2. $\operatorname{tr.deg}(\operatorname{Ker} \partial) = \operatorname{tr.deg} \mathcal{O}(X) - 1$
3. $\operatorname{Ker} \partial$ факториально замкнуто: $ab \in \operatorname{Ker}\partial \to a, b \in \operatorname{Ker}\partial$
4. $\mathcal{O}(X)^* \subseteq \operatorname{Ker} \partial$
5. $\operatorname{Ker}\partial = \operatorname{Ker}\partial' \Rightarrow \exists f, f' \in \mathcal{O}(X): f\partial = f'\partial'$
6. $f \in \operatorname{Ker}\partial \to f\partial \in$ ЛНД

$\boxed{\text{Опр.}}$ $f\partial$ – <u>реплика</u> ∂

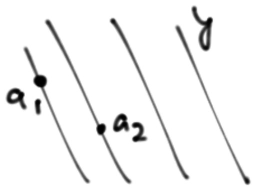
$X = \mathbb{A}^2$



$\boxed{\text{Опр.}}$ $\mathrm{SAut}(X) = \langle \mathbb{G}_a\text{-действия} \rangle \subseteq \mathrm{Aut}(X)$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $G \curvearrowright X$ – бесконечно транзитивное действие, если $\forall m \in \mathbb{N}$ $\forall$ разл. $a_1, \dots, a_m$ $\forall$ разл. $b_1, \dots, b_m$ $\exists g \in G$ $g(a_i) = b_i$

Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{A}^2$. Возьмем направление y т.ч. на любой прямой $\parallel y$ ≤ 1 точки:



$f(x) \frac{\partial}{\partial y} \sim y + f(x)t$

$f(x) = 0$ на слоях $x = x_i$ действие тожд.

$f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$

$(x - x_2) \dots (x - x_n) f(x) \frac{\partial}{\partial y}$

$\to$ двигается только x_1

Гибкость: $x \in X$ <u>гибкая</u>, если $T_x X = \langle v_H \mid H - \mathbb{G}_a\text{-дейст}\rangle$
кас. вектор к орбите H

X <u>гибкое</u>, если
$\forall x \in X_{reg}$ гибкая.

$\Rightarrow X$ унирационально
$\exists$ гибкая точка $\Leftrightarrow SAut X \curvearrowright X$ с открытой орбитой O

<u>FML-инвариант</u>: $FML(X) = \bigcap \operatorname{Quot} \operatorname{Ker}$
(field Makar-Limanov)

$\Updownarrow$

$FML(X) = k$

(и тогда $\forall x \in O$ гибкая)

$\boxed{\text{Теорема}}$ (AFKKZ) - Arzhantsev, Flenner, Kaliman, Kutcshebauch, Zaideberg

Эквивалентны: (потом и для X квазиафф.)

1. X гибкое
2. $SAut X \curvearrowright X_{reg}$ транзитивно — верно и в $\operatorname{char} = p$
3. $SAut X \curvearrowright X_{reg}$ беск. транзитивно

Примеры гибких многообразий:

X — <u>невырожденное</u> торическое $\Rightarrow X$ гибкое
$X \ncong k^* \times Y$

(Аржанцев, Куюмжиян, Зайденберг)

Аффинные конусы:

Y проективное, нормальное, $H \subset Y$ очень обильный дивизор
$\rightsquigarrow |H| : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, $X = \operatorname{AffCone}_H Y \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Цилиндр $U \subset Y$ называется <u>H-полярным</u>, если
$Y \setminus U = \operatorname{supp} D$, D — эффективный, $D \in |dH|$, $d > 0$

$\mathbb{G}_a$-действия на $X = \mathrm{Aff\,Cone}_H Y \longleftrightarrow$ H-поляр цилиндры на Y
(однородные)

ЛНД $\partial = \partial_e + \dots + \partial_h \Rightarrow \partial_e, \partial_h$ ЛНД

$\boxed{\text{Опр.}}$ Подмножество $W \subset Y$ наз. <u>инвариантным</u> отн-но цилиндра U, если $\forall s$: $\mathbb{A}^1$-слоя U $s \cap W \in \{\varnothing, s\}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ Покрытие Y цилиндрами $\{U_i\}$ наз. <u>трансверсальным</u>, если $\nexists \varnothing \neq W \subsetneq Y$, инвар. $\forall U_i$

$\boxed{\text{Теорема}}$ Если $\exists$ трансверсальное покрытие Y_{reg} H-полярными цилиндрами, то $X = \mathrm{AffCone}_H Y$ гибкий

$$(\mathrm{SAut}\,X) \cdot x \xrightarrow{\pi} W \text{ — инвариантно } \forall U_i$$

$\rightsquigarrow W = Y_{reg}$

(AKZ) Афф. конус над G/P гибкий

$$\begin{matrix} x \mapsto x + t \\ y \mapsto y + t^p \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x \mapsto x + t \\ y \mapsto y \end{matrix}$$

Афф. конусы над поверхностями дель Пеццо

кас. векторы совпадают

J. Blanc, A. Dubouloz, Huge automorph. group... , 2013

Tame X — ручные автоморфизмы

$$\mathrm{Tame}\,\mathbb{A}^n = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \mapsto \lambda_1 x_1 \\ x_2 \mapsto ?(x_1, x_2) \\ \dots \end{pmatrix} \right\rangle * \mathrm{Aff}\,\mathbb{A}^n$$

$\mathrm{Tame}\,\mathbb{A}^2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{A}^2$ (Makar-Limanov)

$\mathrm{Tame}\,\mathbb{A}^3 \neq \mathrm{Aut}\,\mathbb{A}^3 \leftarrow$ автом. Нагаты — дикий: Шестаков-Умирбаев

$\mathrm{Tame}\,\mathbb{A}^4$ — ? Furter, Lamy, ...: Tame Q, дек.13/янв.14