Гибкость аффинных многообразий II

24.01.2014

А. Перепечко

Напоминание:

X аффинно: ЛНД $\longleftrightarrow$ $\mathbb{G}_a$-действие $\longleftrightarrow$ главный цилиндр

$X = \mathrm{AffCone}_H Y$ $\quad$ $\mathbb{G}_a$-действие на $X \longleftrightarrow H$-полярный цилиндр на Y

гибкость $X \Longleftrightarrow$ трансв. покрытие Y H-поляр. цилиндрами

Поверхности дель Пеццо

<u>Опр.</u> $Y \longrightarrow \mathbb{P}^2$ - раздутие r точек общего положения

$r \leq 8 \rightsquigarrow$ пов-сть дель Пеццо степени $9-r=d$

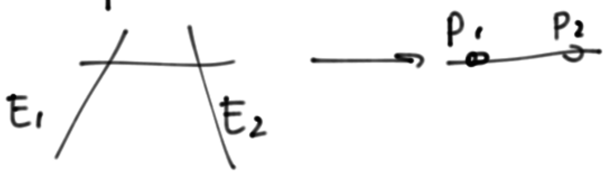
$-K_Y$ очень обильный, $d \geq 3 \rightarrow Y \hookrightarrow \mathbb{P}^d$

$d=9$: $\mathbb{P}^2$

$d=8$: $Bl_p \mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$E_8, E_7, E_6, D_5, A_4, A_2+A_1, A_1+A_1, A_1$

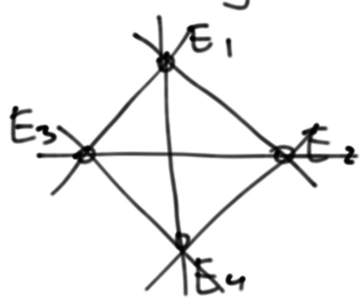
$d=7$

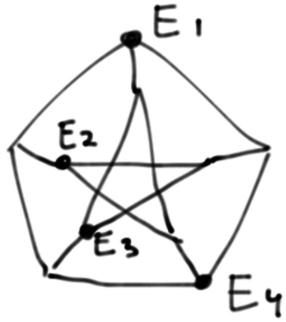


$d \geq 6$: Y торическое $\rightsquigarrow$ AffCone гибкий

$d=4,5 \rightsquigarrow$ любой конус гибкий

$d=5$:



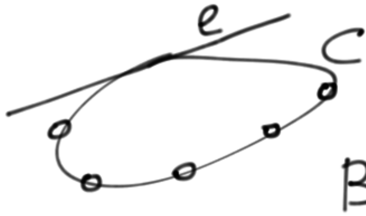


$$U_1 \cong \mathbb{P}^2 \setminus (l_{13} \cup l_{24}) \cong \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, p_2\})$$

$\rightsquigarrow$ получаем 3 цилиндра, покр. все кроме E_1

Стягивая другие дивизоры, покрываем остальное

$d=4 \rightsquigarrow \mathbb{P}^2$ в пяти точках $\rightsquigarrow$ они лежат на одной конике



$$\alpha C+\beta\cdot 2\ell=0$$

— пучок коник $\rightsquigarrow$ цилиндр

Варьируем $\ell \rightsquigarrow$ покрываем трансверсально

Сечения над многообразиями Сегре–Веронезе

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Мн-ие Сегре-Веронезе</u> $\mathbb{P}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{P}^{n_r}$ вложение отн. рассл. $\mathcal{O}(a_1)\otimes\dots\otimes\mathcal{O}(a_r)$

Многообразие сечений $\sigma_1(Y)$ над проективным $Y\hookrightarrow\mathbb{P}^N$

$\sigma_1(Y)=\{\text{сечения } Y\}\subset\mathbb{P}^N$

(Mateusz Michalek)

$Y=\sigma_1(SV(\mathbb{P}^{n_1}\times\dots\times\mathbb{P}^{n_r}))=\bigcup U_i$

- U_i торические
- $Y\setminus U_i$ — гиперплоское сечение

Торсоры

X гладкое, $\mathcal{O}(X)^*=k$, $Cl(X)=\mathbb{Z}^r$

$K\subset WDiv\,X$, $K\xrightarrow{\sim} Cl(X)$

Пучок Кокса $R=\bigoplus_{D\in K}\mathcal{O}_X(D)$; Кольцо Кокса: $R(X)=\bigoplus_{D\in K}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(D))$

Раньше: $\mathcal{O}(\mathrm{aff\,Cone}_H Y)=\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y(dH))$

$\hat{X}=\mathrm{Spec}_X R$ $\qquad H=\mathrm{Spec}(k[K])\curvearrowright\hat{X}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Универсальный торсор</u>: $q:\hat{X}\longrightarrow X$

— лок.тривиальное H-главное расслоение

Если $R(X)$ кон. порождена, то

$\hat{X} \hookrightarrow \overline{X} = \operatorname{Spec} R(X)$, $\operatorname{codim} \overline{X} \setminus \hat{X} \geq 2$

$\mathbb{G}_a$-действие на $\hat{X}$ ← цилиндр на X

гибкость $\hat{X}$ ⟵ трансверс. покрытие на X

A-покрытые многообразия

$\boxed{\text{Опр.}}$ Если $X = \bigcup U_i$, $U_i \cong \mathbb{A}^n$, то X называется A-покрытым

⇒ • X гладкое, $\mathcal{O}(X)^* = k$, $Cl(X) = \mathbb{Z}^r$

• трансверс. покрытие цилиндрами

Поэтому

$\boxed{\text{Теорема}}$ Унив. торсор A-покрытого многообразия — гибкий.

Примеры A-покрытых многообразий

• полные гладкие торические

• полные гладкие T-многообразия сложн. 1 ($T \curvearrowright X$, $\operatorname{codim} T_x = 1$)

• мн-ия Фано разм. 3: $\mathbb{P}^3$, Q, V_5, V_{22} - Мукаи-Умемуры

• тотальные пр-во вект. (проект.) рассл.

• разд. A-покр. многообразия в точке → ∀ гладкая полная рац. поверхность