12.02.2014

Wagoner: Pictural description of the boundary map in algebraic K-theory ('82)

С. Синчук

$J \trianglelefteq \underbrace{A}_{\text{асс. кольцо}}$

$$\to \quad K_3(A) \longrightarrow K_3(A/J) \xrightarrow{\partial} K_2(A,J) \xrightarrow[q]{} K_2(A) \longrightarrow K_2(A/J) \to \dots$$

$X(A)$, $Y(A)$ — образующие и соотношения Стейнберга

$Y(A)^{-1} = Y(A)$, $\quad St(A) = \langle X(A) \mid Y(A) \rangle$; $Y(A) = \underset{\text{стягив.}}{N} \sqcup \underset{\text{полож.}}{P} \sqcup P^{-1}$

R1 $\quad x_{ij}(a)x_{ij}(b)x_{ij}(a+b)^{-1} \in P$

R2 $\quad [x_{ij}(a), x_{kl}(b)]$

R3 $\quad [x_{ij}(a), x_{jk}(b)]\, x_{ik}(ab)^{-1} \in P$

$R2^{-1} = R_2 \quad (i > k$ или $i = k, j > l)$

$R1^{-1} \quad R_3^{-1}$

$[x_{ij}(a), x_{ij}(a)] \in N$

$[x_{ij}(a), x_{ij}(b)]$, $a \neq b$

$$\begin{tikzcd} A(J) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & A \arrow[d, "\pi"] \\ A \arrow[r, "\pi"'] & A/J \end{tikzcd}$$

$F(A) = \langle X(A) \rangle$

$K_2(A) = \mathrm{Ker}(St(A) \longrightarrow E(A))$

$E(A,J) = \mathrm{Ker}(E(A(J)) \xrightarrow{p_{1*}} E(A))$

$$St(A,J) = \frac{\mathrm{Ker}\, p_{1*}}{[\mathrm{Ker}\, p_{1*}, \mathrm{Ker}\, p_{2*}]}$$, где $p_{i*} = St(p_i)$

// Keune, Loday

$Q(A) = \langle (y,f) \in Y(A) \times F(A) \mid \dots \rangle$

$$\begin{array}{ccccccc} P(A) & \to & Q(A) & \to & F(A) & \to & St(A) \\ & & (y,f) & \mapsto & y^f & & \end{array}$$

$\uparrow$ карт. Игусы

$H(A)$ — $St(A)$-подмодуль спец. картинок

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Игуса) $P(A)/H(A) = K_3(A)$

$$Q(A/J) \xrightarrow{\partial_0} St(A) \qquad A(J) \xleftarrow{\Delta} A$$

диагональ

$$\theta : A/J \underset{\longrightarrow}{\overset{\pi}{\longleftarrow}} A \text{ — сечение}$$

$X(A(J)) \ni x_{ij}((a,b)) =: x_{ij}(a,b)$

① $K : Y(A/J) \longrightarrow F(A(J))$

$R1 \longmapsto x_{ij}(\Delta\theta a)\, x_{ij}(\Delta\theta b) \cdot x_{ij}(\theta(a)+\theta(b), \theta(a+b))^{-1}$

$R2 \longmapsto [x_{ij}(\Delta\theta a), x_{kl}(\Delta\theta b)]$

$R3 \longmapsto [x_{ij}(\Delta\theta a), x_{jk}(\Delta\theta b)]\, x_{ik}(\theta(a)\cdot\theta(b), \theta(ab))^{-1}$

для $R1^{-1}, R3^{-1}$ положим $K(y^{-1}) := K(y)^{-1}$

② $\lambda : F(A/J) \longrightarrow F(A(J))$

$x_{ij}(a) \longmapsto x_{ij}(\Delta\theta a)$

$$\partial(\underbrace{\Pi(y_i, f_i)}_{\in F(Y(A/J)\times F(A/J))}) = \Pi K(y_i)^{\lambda(f_i)} \in St(A,J)$$

$\boxed{\text{Зам.}}$ ① $K(R1) = x_{ij}(0, \theta_{a+b})$, где $\theta_{a+b} = \theta(a)+\theta(b)-\theta(a+b) \in J$

② $K(R2) = 1$

③ $K(R3) = x_{ik}(0, \theta_{a\cdot b})$, где $\theta_{a\cdot b} = \theta(a)\cdot\theta(b) - \theta(ab) \in J$

④ $F(Y(A/J)\times F(A/J)) \longrightarrow St(A,J)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ ∂ опр. корректно (уважает 3 соотн. $Q(A/J)$)

1) y стягиваемо $\Rightarrow K(y) = 1$, т.к. стяг. $\in R2$

② $\partial(y,f)^{-1} = \kappa(y)^{-\lambda(f)} = \kappa(y^{-1})^{\lambda(f)} = \partial(y^{-1},f)$

③ $\partial\left((z,f)^{(y,e)}\cdot(z^{-1}, f\cdot y^{e})\right) = 1$

$$\parallel$$

$$\left(\kappa(y)^{-\lambda(e)}\right)\left(\kappa(z)^{\lambda(f)}\right)\left(\kappa(y)^{\lambda(e)}\right)\underbrace{\left(\lambda(y)^{-\lambda(e)}\right)\left(\kappa(z)^{-\lambda(f)}\right)\left(\lambda(y)^{\lambda(e)}\right)}_{\kappa(z)^{-\lambda(fy^{e})}} =$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda(R1) &= x_{ij}(\Delta\Theta_{a+b}) \\ \lambda(R2) &= 1 \\ \lambda(R3) &= x_{ik}(\Delta\Theta_{a\cdot b}) \end{aligned}\right\} \text{ по модулю } \mathcal{Y}(A/\mathcal{Y})$$

$$\rightsquigarrow \quad \lambda(y) = \kappa(y)\cdot x_{ij}(\underset{\substack{\cap \\ \mathcal{Y}}}{b}, 0) \qquad \forall y \in \mathcal{Y}(A/\mathcal{Y})$$

$$\left[\left(\kappa(z)^{\lambda(f)}\right)^{\left(\kappa(y)^{\lambda(e)}\right)} ; x_{ij}(b,0)^{\lambda(e)}\right] = 1$$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\mathrm{Im}(\partial|_{P(A/\mathcal{J})}) \subseteq K_2(A,\mathcal{J})$

$$K_2(A,\mathcal{J}) = \mathrm{Ker}(St(A,\mathcal{J}) \to E(A,\mathcal{J}))$$

На самом деле, $\mathrm{Im}(\partial|_{P(A/\mathcal{J})}) \subseteq \mathrm{Ker}(St(A,\mathcal{J}) \xrightarrow{\overline{p_{2*}}} St(A))$

Док-во:

$g \in Q(A/\mathcal{J})$, $g = \prod (y_i, f_i)$ и $\prod y_i^{f_i} = 1$ в $F(A/\mathcal{J})$

$F(p_2)(\partial g)$ — слово в $F(A)$

$$\underset{\substack{\cap \\ A/\mathcal{J}}}{x_{ij}(a)} \longrightarrow x_{ij}(\theta(a)) \qquad \Longrightarrow \partial g \in \mathrm{Ker}\,\overline{p_{2*}}$$

$\square$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\partial_\theta|_{P(A/\mathcal{J})}$ не зависит от θ

Док-во: θ, θ' — два сечения, $\theta'(b_k) = \theta(b_k)$

$$\partial g = \prod_k x_{i_k j_k}(\underset{\uparrow \text{ зависит от } \theta}{a_k, \theta(b_k)})^{\varepsilon_k}, \quad \partial' g = \prod_k x_{i_k j_k}(a'_k, \theta(b_k) + c_k)^{\varepsilon_k} \quad \text{зависит от } \theta' \quad (c_k \in \mathcal{J})$$

(1)

$$\prod_k x_{i_k j_k}(a'_k, \theta(b_k))^{\varepsilon_k} \qquad (\varepsilon_k = \pm 1)$$

(2)

$p_{2*}\partial' g$ стягивается в $F(A)$

$$p_{2*}\partial' g = u \cdot x_{ij}(\theta(b) + c)^{\varepsilon}\, w\, x_{ij}(\theta(b) + c)^{-\varepsilon} \cdot v$$

$$\partial' g = \mathcal{U} \cdot x_{ij}(a', \theta(b) + c)^{\varepsilon} W x_{ij}(a'', \theta(b) + c)^{-\varepsilon} V$$

$$= x_{ij}(a', \theta(b))^{\varepsilon} \cdot x_{ij}(0, c)^{\varepsilon} W x_{ij}(0, c)^{-\varepsilon} x_{ij}(a'', \theta(b))^{-\varepsilon} \cdot V$$

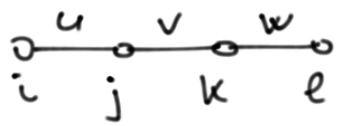
1 шаг: ∂ κ λ — исп. θ слева и справа

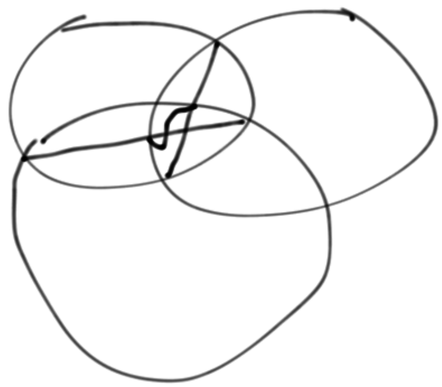
автомат $\to$ « $\bar{\kappa}$ $\bar{\lambda}$ — исп. θ' слева и θ справа

∂' κ' λ' — исп. θ' слева и справа

Лемма $\partial(H(A/\mathcal{J})) = 0$

<u>Док-во</u> (читерское):





Пусть $i<j<k<l$

$\to$ попали в U, а $U \cap K_2 = 0$