26.02.2014

Коммутаторная ширина групп Шевалле

А. Смоленский

$\operatorname{rk}\Phi \geq 2, \quad w \in W(\Phi) \quad n \in \mathbb{N}$

$$\Theta^w = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \forall k \in \mathbb{Z} \ \ w^k\alpha \in \Phi^+\} =: \Theta$$

$$\Omega_n^w = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w^{n+1}\alpha \in \Phi^- \ \ w\alpha, w^2\alpha, \dots, w^n\alpha \in \Phi^+\} =: \Omega_n$$

$$\Phi^+ = \Theta^w \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} \Omega_i^w$$

Замечание Θ замкнуто

Док-во $\alpha, \beta \in \Theta$, $\alpha+\beta \in \Phi^+ \setminus \Theta$ $\exists k \geq 0 : w^k(\alpha+\beta) \in \Phi^-$

$w^k(\alpha+\beta) = w^k\alpha + w^k\beta \Rightarrow w^k\alpha \in \Phi^-$ или $w^k\beta \in \Phi^-$ $\square$

Лемма $\Theta \cup \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k$ заминуто $\forall n$

Д-во: аналогично $\square$

Следствие $\Phi^+ \setminus \bigcup_{k \geq n} \Omega_k$ замкнуто

Опр. $\widetilde{\pi} \in W(\Phi)$:

$A_\ell, B_\ell, C_\ell \rightsquigarrow \widetilde{\pi} := \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_\ell$

$D_\ell \rightsquigarrow \widetilde{\pi} := \sigma_\ell \cdot \ldots \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_1$

$E_7, E_8 \rightsquigarrow \widetilde{\pi} := \sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4 \cdots (\sigma_7$ или $\sigma_8)$

$F_4 \rightsquigarrow \widetilde{\pi} := \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ 

$G_2 \longrightarrow \widetilde{\pi} := \sigma_2\sigma_1$ 

$E_6 \rightsquigarrow \widetilde{\pi} := \sigma_1\sigma_3\sigma_4\sigma_5\sigma_6$

$\pi \in \widetilde{W}(\Phi) = N(\Phi, \mathbb{Z})$

$\quad = \langle w_\alpha(1),\ \alpha \in \Phi \rangle$

$\hat{\pi} = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} \implies \pi = w_{i_1}(1) \cdots w_{i_k}(1)$

см. Титс, Нормализаторы торов, 1966

(или про структурные константы, 1966)

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \pm 1 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL$$

почти что сопутствующая матрица

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ -1 & 0 & & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} = u\pi,\ u \in U(\Sigma_e)$$

$\Sigma_e = \{\alpha \in \Phi \mid m_e(\alpha) > 0\}$

$\Delta_e = \{\alpha \in \Phi \mid m_e(\alpha) = 0\}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ <u>Сопров. матрица</u> $= u\pi$, где $u \in U(\Sigma)$, $\Sigma \subseteq \overset{\tilde{\pi}}{\Theta} \cup \Omega_0^{\tilde{\pi}}$

- A_e: $\Sigma = \Sigma_e$
- B_e: $\Sigma = (\Sigma_e^{=2} \cap \Sigma_{e-1}^{=1}) \cup \{\alpha_e\}$
- C_e: $\Sigma = (\Sigma_e^{=1} \cap \Sigma_{e-1}^{=1}) \cup \{\alpha_e\} = \Sigma_e^{=1} \cap \Sigma_{e-1}^{\leq 1}$
- D_e: $\Sigma = \Sigma_1 \cap (\Delta_e \cup \Delta_{e-1})$
- E_6: $\Sigma = (\Sigma_6 \cap \Delta_2) \cup (\Sigma_2 \setminus \{\alpha_2\}) \neq \overset{\tilde{\pi}}{\Theta} \cup \Omega_0^{\tilde{\pi}}$

$\boxed{\text{Опр.}}$ $h_\alpha(u) = w_\alpha(u) w_\alpha(-1)$, $w_\alpha(u) = x_\alpha(u) x_{-\alpha}(-u^{-1}) x_\alpha(u)$

$w_\alpha(u) x_\beta(t) w_\alpha(u)^{-1} = x_{\sigma_\alpha \beta}(\pm u^{-\langle \beta, \alpha \rangle} t)$

$$w_\alpha(u)\, w_\beta(v)\, w_\alpha(u)^{-1} = w_{\sigma_\alpha\beta}(\pm u^{-\langle\beta,\alpha\rangle} v)$$

$$h_\alpha(u)\, w_\beta(v)\, h_\alpha(u)^{-1} = w_\beta(u^{\langle\beta,\alpha\rangle} v)$$

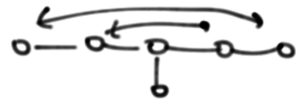
$\boxed{\text{Лемма}}$ $\forall u \in \mathcal{U}^+(\Phi)\ \exists \eta \in \mathcal{U}^+(\Phi):\ \eta u \pi \eta^{-1}$ — сопр. матр.

т.е. $= v\pi,\ v \in \mathcal{U}(\Sigma)$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $\forall v \in \mathcal{U}^-(\Phi)\ \exists \eta \in E(\Phi):\ \eta v \pi \eta^{-1}$ — сопр. матрица

т.е. $= u\pi,\ u \in \mathcal{U}(\Sigma)$

<u>Д-во:</u> w_0 — длиннейший эл-т группы Вейля, $\hat{w}_0$ — его подъем в $\hat{W}(\Phi)$

- $\Phi \neq A_l, E_6 \Rightarrow w_0 \tilde{\pi} w_0^{-1} = \tilde{\pi}$, $\hat{w}_0 \pi \hat{w}_0^{-1} = \pi'$
- $\Phi = A_l, E_6$:  , 

$\rightsquigarrow w_0 \tilde{\pi} w_0^{-1} = \tilde{\pi}^{-1}$, $\hat{w}_0 \pi \hat{w}_0^{-1} = (\pi')^{-1} \overset{?!}{\sim} \pi^{-1}$

$h \hat{w}_0 v \pi \hat{w}_0 h^{-1} \in \mathcal{U}^+(\Phi)\pi^{-1} \sim \pi^{-1}\mathcal{U}^+(\Phi)$

обратный к $x \in \mathcal{U}^+(\Phi)\pi$ □

$\boxed{\text{Лемма}}$ $x \sim$ сопр. матр. $\Rightarrow x^{-1}$ тоже (если $\Phi = A_l$ или E_6)

<u>Док-во:</u> $\eta x \eta^{-1} = u\pi$, $u \in \mathcal{U}(\Sigma)$

$\rightsquigarrow \eta x^{-1} \eta^{-1} = \pi^{-1} u^{-1}$ сопр. $\hat{w}_0$

$\sim \pi u',\ u' \in \mathcal{U}(w_0 \Sigma_l) = \mathcal{U}(-\Sigma_l)$ ($\Phi = A_l$)

сопр. π^{-1} $\sim u'\pi = \pi u'',\ u'' \in \mathcal{U}(\Sigma_l)$

π $\sim u''\pi$

Для E_6 — аналогично, но $\mathcal{U}(\Sigma \cup \{\alpha_2\})$ вместо $\mathcal{U}(\Sigma)$ (?!)

□

$$h_\alpha(u)\,w_\beta(v)\,h_\alpha(u)^{-1} = w_\beta(u^{\langle\beta,\alpha\rangle} v), \qquad v = \pm 1$$

$$\pi' = w_{\alpha_1}(\pm 1)\cdots w_{\alpha_n}(\pm 1) \qquad \alpha_i \in \Pi \ \forall i$$

$$h_{\alpha_i}(\varepsilon_i)\,\pi'\,h_{\alpha_i}(\varepsilon_i)^{-1}$$ ← знаки изменятся только в тех, кот. соединены ребром

→ подправляем знаки по очереди, почти всегда это получается (кроме E_7 и D_ℓ пока что)

$\boxed{\text{Лемма}}$ $(A_\ell, \varpi_1) = E(\ell+1, R)$

$\exists g \in E(\ell+1) : \ g-1 \in E(\ell+1, R)$

<u>Док-во</u> $\quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, блоки из них $\square$

$\boxed{\text{Лемма}}$ $u \in U(\Sigma)$ — произведение небольшого числа коммутаторов (на самом деле)

A_ℓ: $\Sigma \subseteq \Sigma_\ell \qquad E(\Delta_\ell) \curvearrowright U(\Sigma_\ell)$

$$\Theta = \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha(\theta_\alpha)$$

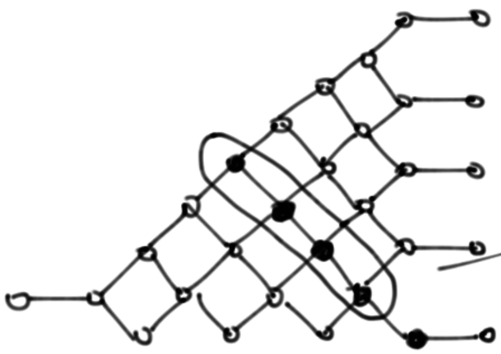
$$\eta = \Big[g, \prod_{\alpha\in\Sigma} x_\alpha(\zeta_\alpha)\Big], \text{ где } \zeta_\alpha = {}^{(g-1)^{-1}}\theta_\alpha$$

$$g\cdot \prod x_\alpha(\zeta_\alpha)\, g^{-1} = \prod x_\alpha(\zeta'_\alpha), \quad \zeta'_\alpha = {}^{g}(\zeta_\alpha)$$

$$\rightsquigarrow \eta = \prod x_\alpha(-\zeta''_\alpha), \qquad (\zeta''_\alpha) = (\zeta'_\alpha) - (\zeta_\alpha) = {}^{(g-1)}(\zeta_\alpha) = (\theta_\alpha)$$

$\to \eta = \Theta$ $\square$

C_ℓ, ad:



покрывается $A_\bullet$

Последний шаг:

$g\in E(\Phi,R) \rightsquigarrow g=u_1v_1u_2v_2 \qquad u_i\in U^+,\ v_i\in U^-$

$g=u_3c_3v_3=c_2(u_3\pi)(\pi^{-1}v_3)$

$\psi:=u_3\pi,\ \lambda:=\pi^{-1}v_3$

$\rightsquigarrow \exists \mu,\nu\in E(\Phi,R):\ \mu\psi\mu^{-1},\ \nu\lambda^{-1}\nu^{-1}$ — сопр. матрицы

$\mu\psi\mu^{-1}=\zeta\nu\lambda^{-1}\nu^{-1},\ \zeta\in U(\Sigma)$

$\rightsquigarrow \psi\lambda=\mu^{-1}\zeta\nu\lambda^{-1}\nu^{-1}\mu\lambda=\mu^{-1}\zeta\nu\cdot\lambda^{-1}\nu^{-1}\zeta^{-1}\mu\lambda\lambda^{-1}\mu^{-1}\zeta\mu\lambda$

$=[\mu^{-1}\zeta\nu,\lambda^{-1}]\cdot\underbrace{\lambda^{-1}\mu^{-1}\zeta\mu\lambda}_{\zeta^{\mu\lambda}}$

$\boxed{\text{Ответ}}$

Φ	w_c
A_ℓ	3
B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ	4
E_7, E_8	4
E_6	5
F_4, G_2	3

Над булевым кольцом: w_c-1

$\mathbb{Z}[1/p]$: та же оценка