Теория категорий

20 марта 2012 г.

Это конспект лекций Н. А. Вавилова и А. Ю. Лузгарева. Все опечатки и неточности остаются на совести авторов конспекта; о них можно написать по адресу `lyosha@cadadr.org`. Регулярно обновляющаяся версия — `http://cadadr.org/notes/categories.pdf` (исходный файл — `categories.tex`)

Рекомендованная литература:

1. С. Маклейн, *Категории для работающего математика.*
2. И. Букур, А. Деляну, *Введение в теорию категорий и функторов.*
3. Р. Голдблатт, *Топосы. Категорный анализ логики.*
4. П. Т. Джонстон, *Теория топосов.*
5. С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Введение в гомологическую алгебру.*
6. J. Adamek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *The Joy of Cats.*

\+ Почти любая книжка по гомологической алгебре или алгебраической топологии.

Содержание

1 Категории

Определение 1.1. **Категория** $\mathcal{C}$ задается:

- Классом **объектов** $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- Для любых двух объектов $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ множеством $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, элементы которого называются **морфизмами** из A в B в категории $\mathcal{C}$.
- Для любых трех объектов $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ задана **композиция**

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C), \\ (A \xrightarrow{f} B,\ B \xrightarrow{g} C) & \mapsto & A \xrightarrow{f\,g} C. \end{array}$$

Причем выполняются следующие аксиомы:

1. Различные множества морфизмов не пересекаются: пусть $A, B, C, D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$; тогда если $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \neq \varnothing$, то $A = B$ и $C = D$. Таким образом можно говорить о классе всех морфизмов $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}) := \coprod\limits_{A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.
2. Композиция морфизмов ассоциативна, т. е. для всех $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$
$$f\,(g\,h) = (f\,g)\,h.$$
3. У любого объекта $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ существует (и единственный в силу ассоциативности) **тождественный морфизм** $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$. При этом для любых двух объектов $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и для любого морфизма $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ выполнено $1_A \circ f = f = f \circ 1_B$.

1.1 Первые примеры

1. $\mathcal{S}et$ — категория множеств и отображений.

   $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, Y) := \mathrm{Map}(X, Y)$.

   Композицию в $\mathcal{S}et$ принято записывать в обратном порядке, т.е. для $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ используется запись $g\,f$ вместо $f\,g$.
2. Конкретная категория: объекты — множества с дополнительной структурой, а морфизмы — отображения, сохраняющие эту структуру (категория пространств с мерой и измеримых отображений, категория топологических пространств и непрерывных отображений, и т. д.).
3. $\mathcal{G}rp$ — категория групп и гомоморфизмов.

   Определение 1.2. Морфизм $A \xrightarrow{f} B$ называется **изоморфизмом**, если существует морфизм $B \xrightarrow{g} A$, такой что $f\,g = 1_A$ и $g\,f = 1_B$.

   Определение 1.3. Категория с одним объектом называется **моноидом**.

   Группой называется категория с одним объектом, в которой все морфизмы являются изоморфизмами.

   (Точнее говоря, моноидом (группой) в классическом смысле является $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$.)
4. $\mathcal{A}b$ — категория абелевых групп: объекты — абелевы группы, морфизмы — гомоморфизмы групп.

   Определение 1.4. Группа G называется **абелевой** (коммутативной), если умножение в ней коммутативно.

5. $\mathcal{Ring}$ — категория ассоциативных колец: объекты — ассоциативные кольца, морфизмы — гомоморфизмы колец.

6. Категория модулей и линейных отображений.

7. **Транзитивный граф** (**предпорядок**) — множество объектов $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, снабженное рефлексивным транзитивным отношением

$$A \preceq B \iff \text{существует морфизм } A \to B,$$

причем между любыми двумя объектами имеется не более одного морфизма.

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop above] \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left] \arrow[r] & \circ \arrow[loop right] \end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} \circ \arrow[loop left] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \circ \arrow[loop right] \arrow[dl] \\ & \circ \arrow[loop below] & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Определение 1.5. **Бинарным отношением** на множестве X называется множество $R \in \mathrm{Rel}(X) := \mathrm{Rel}(X, X) := 2^{X \times X}$. Мы пишем $x\,R\,y$, если $(x, y) \in R$.

R называется **транзитивным**, если $x\,R\,y, y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$ и **рефлексивным**, если $x\,R\,x$ для любого $x \in X$.

Множество X с рефлексивным транзитивным отношением называется **предупорядоченным** (*preordered set*).

Предупорядоченное множество X называется **частично упорядоченным** (**poset**,**ЧУМ**), если R антисимметрично: $x\,R\,y,\ y\,R\,x \Rightarrow x = y$

8. **Дискретная категория** — это категория, в которой все морфизмы тождественные:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) = \begin{cases} \varnothing, & A \neq B, \\ \{1_A\}, & A = B. \end{cases}$$

Всякий класс можно очевидным образом снабдить структурой дискретной категории.

1.2 Примеры категорий, связанные с теорией множеств

Определение 1.6. Категория $\mathcal{D}$ называется **подкатегорией** категории $\mathcal{C}$, $\mathcal{D} \leq \mathcal{C}$, если

1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{D}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

2) для любых двух объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(D)$ выполнено $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, и

3) композиция морфизмов из $\mathcal{D}$ совпадает в категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$.

Подкатегория называется **полной**, если для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ совпадают множества морфизмов $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

- $\mathcal{Bin}$: объекты — множества, морфизмы — бинарные отношения, композиция — произведение отношений.

  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Bin}}(X, Y) := \mathrm{Rel}(X, Y)$.

- $\mathcal{FinSet}$ — категория конечных множеств и отображений

  Категория конечных множеств — полная подкатегория $\mathcal{Set}$.

- Категория множеств и отображений каких-то типов. Например, $\mathcal{Inj}$ — категория множеств и инъективных отображений (в т.ч. композиция инъективных отображений – инъективное отображение). Эта категория является неполной подкатегорией категории $\mathcal{Set}$.

  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Inj}}(X,Y) := \mathrm{Inj}(X,Y) \subsetneq \mathrm{Map}(X,Y)$.

- $\mathcal{Surj}$ — категория множеств и сюръективных отображений.

  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Surj}}(X,Y) := \mathrm{Surj}(X,Y) \subsetneq \mathrm{Map}(X,Y)$.

- $\mathcal{Bij}$ — категория множеств и биективных отображений.

  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Bij}}(X,Y) := \mathrm{Bij}(X,Y) \subsetneq \mathrm{Map}(X,Y)$.

  Здесь все морфизмы являются изоморфизмами. Такая категория называется **группоидом**.

- $\mathcal{Set}_{\mathcal{U}}$ — категория множеств в некотором универсуме $\mathcal{U}$.

  Универсум есть большое «множество всех множеств», такое что выполняются аксиомы вроде

  1) $\mathbb{N} \in \mathcal{U}$,
  2) $X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow \{X, Y\} \in \mathcal{U}$,
  3) $X \in Y,\ Y \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{U}$,
  4) $X \subset Y,\ Y \in \mathcal{U} \Rightarrow X \in \mathcal{U}$,
  5) $Y \in \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup\limits_{X \in Y} X \in \mathcal{U}$,
  6) $X \in \mathcal{U} \Rightarrow 2^X \in \mathcal{U}$,
  7) $X \in \mathcal{U},\ X \xrightarrow{f} \mathcal{U} \Rightarrow f(X) \in \mathcal{U}$.

  Неформально говоря, элемент $X \in \mathcal{U}$ — это некоторое «множество», а $X \subseteq \mathcal{U}$ — это «класс»; если $X \nsubseteq \mathcal{U}$, то это «экстраординарный класс».

  Существование универсума постулируется как аксиома. Наиболее сильная **аксиома Гротендика** утверждает, что для всякого множества X найдется такой универсум $\mathcal{U}$, что $X \in \mathcal{U}$

- $\mathcal{Set}_\bullet$ — категория множеств с отмеченной точкой. Объекты — пары (X, x), где $x \in X$, морфизмы — отображения $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)$, переводящие отмеченную точку в отмеченную точку. (При композиции это свойство сохраняется.) Это также называется категорией 0-арных операций.

- $\mathcal{Pairs}$ — категория пар. Объекты — пары (X, X'), где $X' \subseteq X$, $X' \neq \varnothing$, морфизмы — отображения $(X, X') \xrightarrow{f} (Y, Y')$, такие что $f(X') \subseteq Y'$.

- $\mathcal{Map}$ — категория отображений; морфизм между отображениями $X_1 \xrightarrow{f_1} Y_1$ и $X_2 \xrightarrow{f_2} Y_2$ — пара отображений $(X_1 \xrightarrow{h} X_2,\ Y_1 \xrightarrow{k} Y_2)$, таких что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h"'] & Y_1 \arrow[d, "k"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

  Композиция вводится следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dd, dashed, bend right] & Y_1 \arrow[d, "k_1"] \arrow[dd, dashed, bend left] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"'] & Y_2 \arrow[d, "k_2"] \\
X_3 \arrow[r, "f_3"] & Y_3
\end{tikzcd}$$

$$(h_2, k_2) \circ (h_1, k_1) := (h_2 \circ h_1, k_2 \circ k_1).$$

- Категория внутренних бинарных отношений (relation systems). Элементы — пары (X, R), где $R \in \mathrm{Rel}(X, X)$. Морфизмы — $(X, R) \xrightarrow{f} (Y, S)$ — отображения $X \xrightarrow{f} Y$ сохраняющие бинарное отношение:

$$a\, R\, b \Rightarrow f(a)\, S\, f(b).$$

Упражнение 1.1. *Это действительно категория.*

- $\mathcal{P}ow$ — категория множеств и степенных отображений. Объекты — множества, морфизмы — отображения между множествами их подмножеств.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}ow}(X, Y) := \mathrm{Map}(2^X, 2^Y).$$

$\mathcal{S}et$ является подкатегорией $\mathcal{P}ow$ благодаря очевидному вложению $\mathrm{Map}(X, Y) \hookrightarrow \mathrm{Map}(2^X, 2^Y)$.

2 Функторы

Функторы — это «отображения между категориями». Они бывают ковариантные и контравариантные.

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — две категории. **Ковариантный функтор** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ задается следующими данными:

1. Каждому объекту категории $\mathcal{C}$ сопоставляется объект категории $\mathcal{D}$:

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \rightsquigarrow F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D}).$$

2. Морфизму $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ сопоставляется морфизм $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$,

причем для любых $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ выполняется

$$F(f\, g) = F(f)\, F(g).$$

А также для любого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ сохраняется тождественный морфизм:

$$F(1_X) = 1_{F(X)}.$$

Контравариантный функтор — это то же самое, но морфизмы развернуты и

$$F(f\, g) = F(g)\, F(f).$$

Как связаны контравариантные и ковариантные функторы?

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{C}$ — категория. Сопоставим ей **двойственную категорию** $\mathcal{C}^*$ (также используется обозначение $\mathcal{C}^{op}$). Объекты — объекты исходной категории, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^*}(X,Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, а композиция вводится следующим образом:

$$(f\,g)^* := g^*\,f^*.$$

Упражнение 2.1. *Ковариантный функтор $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ соответствует контравариантному функтору $\mathcal{C}^* \to \mathcal{D}$, или $\mathcal{C} \to \mathcal{D}^*$, или $\mathcal{C}^* \to \mathcal{D}^*$.*

Тривиальные примеры функторов:

- Тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.
- Постоянный функтор — функтор $Const_Z : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, такой что

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni X \rightsquigarrow Z, \quad \mathrm{Hom}(X,Y) \ni f \rightsquigarrow 1_Z$$

2.1 Представимые функторы

$\mathrm{Hom}(A,-)$ есть **главный ковариантный функтор** $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$**, представленный** $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni B \quad &\rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}(A,B) \in \mathcal{S}et \\ B \xrightarrow{f} C \quad &\rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}(A,B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(A,f)} \mathrm{Hom}(A,C) \end{aligned}$$

Отображение $\mathrm{Hom}(A,f)$, сопоставляет стрелке $g \in \mathrm{Hom}(A,B)$ стрелку $g\,f \in \mathrm{Hom}(A,C)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, dashed, "g\,f"'] & & B \arrow[dl, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Hom}(-,A)$ есть **главный контравариантный функтор** $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$**, представленный** $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \ni B \quad &\rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}(B,A) \in \mathcal{S}et \\ B \xrightarrow{f} C \quad &\rightsquigarrow \quad \mathrm{Hom}(C,A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,A)} \mathrm{Hom}(B,A) \end{aligned}$$

Отображение $\mathrm{Hom}(f,A)$, сопоставляет стрелке $g \in \mathrm{Hom}(C,A)$ стрелку $f\,g \in \mathrm{Hom}(B,A)$:

$$\begin{tikzcd} A & & B \arrow[ll, dashed, "f\,g"'] \arrow[dl, "f"] \\ & C \arrow[ul, "g"] & \end{tikzcd}$$

2.2 Категории, изоморфные своим двойственным

Рассмотрим тождественный функтор $\mathbf{1}_{\mathcal{S}et} : \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$. Каков его *контра*вариантный аналог? Можно попробовать определить нечто вроде

$$\begin{aligned} A \quad &\rightsquigarrow \quad A \\ A \xrightarrow{f} B \quad &\rightsquigarrow \quad B \xrightarrow{f^*} A \end{aligned}$$

Упражнение 2.2. *Это невозможно, и $\mathcal{S}et \ncong \mathcal{S}et^*$.*

Под изоморфизмом категорий здесь понимается следующее.

Определение 2.3. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **изоморфными**, если имеются два встречных функтора $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, такие что $F\,G = \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ и $G\,F = \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$.

Упражнение 2.3. *Тем не менее, для категории $\mathcal{B}ij$ множеств и биективных отображений выполняется $\mathcal{B}ij \cong \mathcal{B}ij^*$. (Построим функтор $A \rightsquigarrow A$, $f \rightsquigarrow f^{-1}$...)*

Упражнение 2.4. *Для категории $\mathcal{B}in$ множеств и бинарных отношений выполняется $\mathcal{B}in \cong \mathcal{B}in^*$. (Построим функтор $A \rightsquigarrow A$, $A \times B \supseteq R \rightsquigarrow R' \subseteq B \times A$...)*

2.3 Функторы степени

Сейчас мы построим два функтора $\mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ — один ковариантный P^+, а другой контравариантный P^-. На объектах $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}et)$ оба функтора заданы одинаково:

$$A \rightsquigarrow 2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$$

2^A — это **булеан**, множество всех подмножеств. Его можно отождествить с множеством $\mathrm{Map}(A, \mathbf{2})$ всех отображений в двухэлементное множество $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

На самом деле, $\{0, 1\}$ — это классификатор объектов в категории $\mathcal{S}et$ (*whatever that means*).

На стрелках $A \xrightarrow{f} B$ функторы P^+ и P^- определены так:

$$\begin{array}{ccc} 2^A & \xrightarrow{P^+(f)} & 2^B \\ C & \mapsto & f(C) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2^B & \xrightarrow{P^-(f)} & 2^A \\ C & \mapsto & f^{-1}(C) \end{array}$$

P^+ и P^- называют также **функтором образа** и **функтором прообраза**.

Упражнение 2.5. *Убедиться, что P^+ и P^- действительно функториальны.*

2.4 Примеры функторов из категории групп

Дальше последуют примеры, связанные с категориями $\mathcal{G}r$ (группы и гомоморфизмы) и $\mathcal{A}b$ (абелевы группы и гомоморфизмы).

Тривиальный пример — **забывающий функтор $\mathcal{G}r \to \mathcal{S}et$**, который «забывает» групповую структуру:

$$\begin{array}{rcl} (G, \cdot) & \rightsquigarrow & G \\ f & \rightsquigarrow & f \end{array}$$

Важным примером функтора является **коммутант** $[\ ,\ ]\colon \mathcal{G}r \to \mathcal{G}r$. **Коммутантом** $[G, G]$ группы G называется группа, порожденная коммутаторами:

$$[G, G] := \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle\,, \text{ где } [x, y] := x\,y\,x^{-1}\,y^{-1}.$$

Чем больше коммутант, тем «более некоммутативна» группа.

$$\begin{array}{rcl} G & \rightsquigarrow & [G, G] \\ H \xrightarrow{f} G & \rightsquigarrow & [H, H] \xrightarrow{f|_{[H,H]}} [G, G] \end{array}$$

Упражнение 2.6. *Убедиться, что это корректное определение, и коммутант функториален.*

Можно также рассмотреть **центр** группы:

$$C(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G\ h\,g = g\,h\}.$$

$C(G)$ есть абелева группа. Чем больше центр, тем группа «более коммутативна». Можно было бы попробовать определить функтор $C\colon \mathcal{Gr} \to \mathcal{Ab}$, положив $G \rightsquigarrow C(G)$.

Упражнение 2.7. *Это нельзя достроить естественным образом до функтора.*

Например, нельзя определить

$$H \xrightarrow{f} G \quad \rightsquigarrow \quad C(H) \xrightarrow{f|_{C(H)}} C(G)$$

— возьмем абелеву группу A, для которой $C(A) = A$; однако она вкладывается в S_n, для которой $C(S_n) = 1$ при $n \geq 3$. Для стрелки $A \hookrightarrow S_n$ определение выше не имеет смысла.

Упражнение 2.8. *Тем не менее, центр функториален на категории групп и эпиморфизмов.*

Абелианизацией группы G называется группа

$$G^{ab} := G/[G,G].$$

G^{ab} — это абелева группа (это максимальный абелев фактор G по нормальной подгруппе $N \leq G$, в том смысле что G/N абелева iff $[G,G] \leq N$).

^{ab} является функтором $\mathcal{Gr} \to \mathcal{Ab}$:

$$\begin{array}{rcl} G & \rightsquigarrow & G^{ab} \\ H \xrightarrow{f} G & \rightsquigarrow & H^{ab} \xrightarrow{f^{ab}} G^{ab} \end{array}$$

Упражнение 2.9. *Проверить функториальность.*

Такой же *контра*вариантный функтор построить нельзя, но можно построить контравариантный функтор $\mathcal{FinGr} \to \mathcal{Ab}$ из категории *конечных* групп.

$$\begin{array}{rcl} G & \rightsquigarrow & G^{ab} \\ H \xrightarrow{f} G & \rightsquigarrow & G^{ab} \xrightarrow{f^{*}} H^{ab} \end{array}$$

Здесь f^* называется **трансфером**. Придумать самостоятельно конструкцию было бы очень сложным упражнением (она может быть естественно сформулирована в терминах когомологий групп).

В категории абелевых групп $\mathcal{Ab}$ для двух стрелок $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(B,C)$ поточечная сумма

$$(\varphi + \psi)(x) := \varphi(x) + \psi(x)$$

снова является стрелкой $\varphi + \psi \in \mathrm{Hom}(B,C)$ (в отличии от ситуации в произвольной группе). Таким образом, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Ab}}(B,C)$ сам является объектом $\mathcal{Ab}$, поэтому в этой ситуации $\mathrm{Hom}(A,-)$ и $\mathrm{Hom}(-,A)$ — это функторы $\mathcal{Ab} \to \mathcal{Ab}$.

Упражнение 2.10. *Продумать это (ковариантный и контравариантный случай).*

$\mathcal{Ab}$ является частным примером **абелевых категорий**, о которых речь пойдет далее в курсе.

2.5 Примеры функторов из категории колец

Определение 2.4. Категория $\mathcal{C}$ называется **аддитивной**, если

1. На каждом множестве $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ определено сложение, превращающее его в абелеву группу.
2. Композиция морфизмов дистрибутивна относительно сложения.

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z \qquad f\,(g+h) = f\,g + f\,h; \tag{i}$$

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z \qquad (f+g)\,h = f\,h + g\,h. \tag{ii}$$

Внимание: во многих книгах это называется ***предаддитивной* категорией**! Для *аддитивной категории* также требуется, чтобы там существовал *нулевой объект* (*универсальный притягивающий* и *универсальный отталкивающий* одновременно), а также конечные *произведения* и *копроизведения*. О том, что это такое — см. далее в лекциях. Мы пока будем считать аддитивной категорией то, что определено выше.

Вопрос: бывает ли в кольце дистрибутивность с одной стороны, но не с другой?
Ответ: например, можно взять кольцо многочленов $K[X]$, но в качестве умножения использовать композицию многочленов $\circ$. В таком случае выполняется дистрибутивность $(f+h)\circ h = f\circ h + g\circ h$, но **не** выполняется $f\circ(g+h) = f\circ g + f\circ h$ (это означает линейность f).

Определение 2.5. **Ассоциативным кольцом с единицей** называется аддитивная категория с одним объектом.

(Точнее, в классическом понимании, ассоциативное кольцо — это $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ в такой категории.)
$\mathcal{Ass}$ — категория ассоциативных колец с единицей и гомоморфизмов между ними.
Гомоморфизмом ассоциативных колец с единицей называется ковариантный аддитивный функтор между ними. (Контравариантный функтор называется **антигомоморфизмом**.)

Определение 2.6. Функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ между аддитивными категориями называется (ковариантным) **аддитивным**, если он сохраняет композицию морфизмов, сложение и единицу:

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{h} Z$$

$$F(f\circ g) = F(f)\circ F(g), \tag{i}$$
$$F(g+h) = F(g) + F(h), \tag{ii}$$
$$F(1_X) = 1_{F(X)}. \tag{iii}$$

После того как мы определили кольца, мы рассмотрим примеры функторов из категории $\mathcal{Ass}$.
Забывающий функтор $\mathcal{Ass} \to \mathcal{Ab}$ переводит кольцо R в его аддитивную группу R^+:

$$(R, +, \cdot, 1) \quad \rightsquigarrow \quad (R, +).$$

Еще один забывающий функтор $\mathcal{Ass} \to \mathcal{Mon}$ переводит кольцо R в его мультипликативный моноид $R^\times$:

$$(R, +, \cdot, 1) \quad \rightsquigarrow \quad (R, \cdot).$$

Наконец, также к забывающим относят **функтор мультипликативной группы** $\mathcal{Ass} \to \mathcal{Gr}$, который переводит кольцо R в его группу обратимых элементов

$$R^* := \{x \in R \mid \exists x^{-1}\ x^{-1}\, x = x\, x^{-1} = 1\}.$$

(Не путать R^* с $R^\times$!)

$$(R, +, \cdot, 1) \quad \rightsquigarrow \quad (R^*, \cdot).$$

Функтор мультипликативной группы дает контрпример к популярному среди начинающих заблуждению, будто функтор переводит эпиморфизмы в эпиморфизмы. Рассмотрим проекцию на факторкольцо

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

Под действием функтора мультипликативной группы этот морфизм перейдет в

$$1 \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*.$$

$\#(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* = \varphi(m)$, и это число не равно единице, если $m > 2$. Таким образом, функтор перевел сюръекцию в отображение, которое сюръекцией не является.

Другой важный пример функтора — функтор $\mathcal{Ass} \to \mathcal{Ass}$, переводящий кольцо R в кольцо $\mathcal{M}(n, R)$ матриц размера n над кольцом R, где n фиксировано.

$$\begin{aligned} R \quad &\rightsquigarrow \quad \mathcal{M}(n, R), \\ R \xrightarrow{\varphi} S \quad &\rightsquigarrow \quad \mathcal{M}(n, R) \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{M}(n, S), \end{aligned}$$

где стрелка $\mathcal{M}(n, R) \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{M}(n, S)$ устроена так:

$$(x_{ij}) \to (\varphi(x_{ij})).$$

Напомним, что такое кольцо матриц $\mathcal{M}(n, R)$.

Определение 2.7. Фиксируем n и рассмотрим **полугруппу стандартных матричных единиц**

$$S := \{0\} \cup \{e_{ij} \mid 1 \le i, j \le n\}$$

со следующим умножением:

$$\begin{aligned} 0 \cdot e_{ij} &:= e_{ij} \cdot 0 := 0, \\ e_{ij} \cdot e_{hk} &:= \begin{cases} e_{ik}, & j = h, \\ 0, & j \ne h. \end{cases} \end{aligned}$$

Кольцом матриц $\mathcal{M}(n, R)$ называется множество всех формальных линейных комбинаций e_{ij} с коэффициентами в R:

$$\sum_{1 \le i,j \le n} x_{ij}\, e_{ij}, \quad x_{ij} \in R.$$

Полугрупповой ноль 0 соответствует пустой сумме.

Сложение вводится следующим образом:

$$\sum x_{ij}\, e_{ij} + \sum y_{ij}\, e_{ij} := \sum (x_{ij} + y_{ij})\, e_{ij}.$$

Умножение дистрибутивно продолжается из определения

$$(a\, e_{ij}) \cdot (b\, e_{hk}) := (a\, b)\, (e_{i\,j}\, e_{h\,k}).$$

$\mathcal{M}(n,R)$ действительно получается ассоциативным кольцом, и единицей по умножению там будет $e := e_{11} + e_{22} + \cdots + e_{nn}$.

Функтор полной линейной группы $\mathrm{GL}_n\colon \mathcal{A}ss \to \mathcal{G}r$ сопоставляет кольцу R **полную линейную группу** $\mathrm{GL}(n,R) := \mathcal{M}(n,R)^*$:

$$\begin{array}{rcl} R & \rightsquigarrow & \mathrm{GL}(n,R), \\ R \xrightarrow{\varphi} S & \rightsquigarrow & \mathrm{GL}(n,R) \xrightarrow{\mathrm{GL}_n(\varphi)} \mathrm{GL}(n,S). \end{array}$$

$\mathcal{R}ing$ — это полная подкатегория в $\mathcal{A}ss$, состоящая из коммутативных колец.

Над коммутативными кольцами естественно рассматривать кольца многочленов и соответствующий функтор

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}ing & \to & \mathcal{R}ing, \\ R & \rightsquigarrow & R[X]. \end{array}$$

3 Важнейшие классы морфизмов

Мы рассмотрим следующие виды морфизмов:

$$\begin{array}{ccc} \text{мономорфизм} & \leftrightarrow & \text{эпиморфизм} \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \text{коретракция} & \leftrightarrow & \text{ретракция} \\ \text{инъекция} & \leftrightarrow & \text{сюръекция} \end{array}$$

(Инъекция и сюръекция определяются для конкретных категорий.)

Определение 3.1. Морфизм $Y \xrightarrow{f} Z$ называется **мономорфизмом**, если для каждого X и для каждой пары стрелок $X \xrightarrow{g,h} Y$ выполняется

$$g\,f = h\,f \Rightarrow g = h.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Определение 3.2. Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется **эпиморфизмом**, если для каждого Z и для каждой пары стрелок $Y \xrightarrow{g,h} Z$ выполняется

$$f\,g = f\,h \Rightarrow g = h.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$

Определение 3.3. Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется **коретракцией**, если найдется такой морфизм $Y \xrightarrow{i} X$, что

$$f\,i = 1_X.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop left, "1_X"] \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "i"] \end{tikzcd}$$

Определение 3.4. Морфизм $X \xrightarrow{f} Y$ называется **ретракцией**, если найдется такой морфизм $Y \xrightarrow{j} X$, что

$$j\, f = 1_Y.$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "j"] \arrow[loop right, "1_Y"] \end{tikzcd}$$

Упражнение 3.1. *В категории $\mathcal{Set}$*

- *мономорфизмы совпадают с коретракциями и инъекциями,*
- *эпиморфизмы совпадают с ретракциями и сюръекциями*

(второй пункт требует аксиомы выбора).

Упражнение 3.2. *В категории $\mathcal{Grp}$*

- *мономорфизмы совпадают с инъекциями,*
- *эпиморфизмы совпадают с сюръекциями.*

В категории $\mathcal{Top}$ топологических пространств соответствующие виды морфизмов не совпадают.

Изоморфизмы в категории $\mathcal{Top}$ — **гомеоморфизмы**, т.е. непрерывные в обе стороны биекции. Но не всякая непрерывная в одну сторону биекция будет иметь *непрерывное* обратное отображение.

Отображение $X \xrightarrow{f} Y$ называется **доминантным**, если его образ плотен в Y, т.е. $\overline{f(X)} = Y$. Эпиморфизмами в категории $\mathcal{Top}$ являются в точности доминантные непрерывные отображения.

Упражнение 3.3. *Легко проверить, что $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ — эпиморфизм, т.е. что*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "f"] & \mathbb{Q} \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & R \end{tikzcd} \qquad f\,g = g\,h \Rightarrow g = h.$$

$$\forall n \; g(n) = h(n) \;\Rightarrow\; \forall m \forall n \; g\left(\frac{m}{n}\right) = h\left(\frac{m}{n}\right).$$

Упражнение 3.4.

- *Если f и g — мономорфизмы, то $f\,g$ — мономорфизм.*
- *Если f и g — эпиморфизмы, то $f\,g$ — эпиморфизм.*
- *Если $f\,g$ — мономорфизм, то f — мономорфизм.*
- *Если $f\,g$ — эпиморфизм, то g — эпиморфизм.*

Упражнение 3.5.

- *Если f — ретракция и мономорфизм, то f — изоморфизм.*
- *Если f — коретракция и эпиморфизм, то f — изоморфизм.*

Упражнение 3.6. *В конкретных категориях*

- *Если f — сюръекция, то f — эпиморфизм.*
- *Если f — инъекция, то f — мономорфизм.*
- *Если f — ретракция, то f — сюръекция.*
- *Если f — коретракция, то f — инъекция.*

Эти следствия можно обратить, если использовать аксиому выбора.

Упражнение 3.7. *Подумать, что мономорфизм, эпиморфизм, коретракция и ретракция означают в категории, являющейся частично упорядоченным множеством.*

Вернемся к вопросу о том, почему в категории $\mathcal{Grp}$ (в отличие от $\mathcal{Set}$) не всякий эпиморфизм является ретракцией. Говорят, что короткая точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 1$$

расщепляется, если имеется сечение

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & G \arrow[r, shift left, "\varphi"] & F \arrow[l, shift left, "\psi"] \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

такое что $\varphi \circ \psi = 1_F$. Это происходит iff G есть **полупрямое произведение** $F \leftthreetimes H$ (т.е. $H \cap F = 1$, $H \cdot F = G$ и $H \trianglelefteq G$), и это более сильное требование, чем $F = G/H$, как в обычной короткой точной последовательности.

Стрелка $G \to F$ — это эпиморфизм, а построение сечения по определению соответствовало бы тому, что это ретракция. Таким образом, не расщепляющиеся короткие точные последовательности дают примеры эпиморфизмов, не являющихся ретракциями.

Следующая короткая точная последовательность не расщепляется:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(Сечению некуда отобразить элементы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ — они все имеют конечный порядок.)

Следующий пример дает **бинарная группа тетраэдра** $\widetilde{A}_4$, которая состоит из 24 элементов: кватернионных единиц $1, i, j, k$, взятых со знаками $+$ и $-$, а также 16 элементов вида $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$:

$$\widetilde{A}_4 := \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k,\ \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)\}.$$

Упражнение 3.8.
- *Проверить, что это действительно группа.*
- *Проверить, что $\widetilde{A}_4$ встраивается в короткую точную последовательность*

$$1 \longrightarrow C_2 \longrightarrow \widetilde{A}_4 \longrightarrow A_4 \longrightarrow 1$$

  где $C_2 = \{\pm 1\}$, а A_4 — обычная знакопеременная группа.
- *Проверить, что эта последовательность не расщепляется.*

Таким образом, мы убедились, что в категории $\mathcal{Grp}$ не всякий эпиморфизм является ретракцией. Аналогичное происходит для колец. Не всегда возможно построить сечение

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & R \arrow[r, shift left] & R/I \arrow[l, shift left, dashed] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

4 Функторы двух аргументов

Функтор двух аргументов (**бифунктор**) переводит пару объектов, соответственно из некоторых категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, в объект какой-то категории $\mathcal{E}$. Есть четыре вида таких функторов:

1) дважды ковариантные,
2) ковариантные по первому и контравариантные по второму аргументу,
3) контравариантные по первому и ковариантные по второму аргументу,
4) дважды контравариантные.

Мы выпишем определение только для 3-го вида.

Определение 4.1. Функтор $F\colon \mathcal{C}^* \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, контравариантный по первому и ковариантный по второму аргументу, производит

1) сопоставление паре объектов из $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ объекта из $\mathcal{E}$:

$$\begin{array}{ccccc} (X & , & U) & \rightsquigarrow & F(X,U) \\ \Cap & & \Cap & & \Cap \\ \operatorname{Ob}\mathcal{C} & & \operatorname{Ob}\mathcal{D} & & \operatorname{Ob}\mathcal{E} \end{array}$$

а также

2) сопоставление паре морфизмов из $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ морфизма из $\mathcal{E}$:

$$(X \xrightarrow{f} Y,\ U \xrightarrow{g} V) \quad \rightsquigarrow \quad F(Y,U) \xrightarrow{F(f,g)} F(X,V).$$

При этом выполняются следующие аксиомы.

I. Сохраняются тождественные морфизмы:

$$F(1_X, 1_U) = 1_{F(X,U)}.$$

II. Сохраняется композиция морфизмов. А именно, если есть композиция морфизмов $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ в $\mathcal{C}$ и композиция морфизмов $U \xrightarrow{k} V \xrightarrow{l} Z$ в $\mathcal{D}$, тогда

$$F(f \circ g,\, k \circ l) = F(f,k) \circ F(g,l).$$

(Смысл записи $\mathcal{C}^* \times \mathcal{D}$ для аргументов бифунктора прояснится чуть позже.)

Упражнение 4.1. *Выписать аксиомы для остальных трех видов бифункторов.*

Основным примером служит **главный функтор** $\mathcal{C}^* \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$. Паре (X,Y) он сопоставляет $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, а морфизмы отображает так:

$$(X \xrightarrow{f} Y,\ U \xrightarrow{g} V) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,U) \xrightarrow{F(f,g)} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,V),$$

где $F(f,g)$ действует как

$$Y \xrightarrow{h} U \quad \mapsto \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} U \xrightarrow{g} V.$$

Упражнение 4.2. *Проверить, что это бифунктор, контравариантный по первому аргументу и ковариантный по второму.*

Определение 4.2. Произведением $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называется категория с классом объектов

$$\operatorname{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) := \operatorname{Ob}\mathcal{C} \times \operatorname{Ob}\mathcal{D}$$

и множествами морфизмов

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((X,Y),\,(U,V)) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,U) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,V).$$

Единичные морфизмы есть $1_{(X,Y)} := (1_X, 1_Y)$, а композиция $(X,U) \xrightarrow{(f,k)} (Y,V) \xrightarrow{(g,l)} (Z,W)$ определяется как

$$(f,k) \circ (g,l) := (f \circ g,\ k \circ l).$$

Теперь видно, что бифунктор — это функтор *одного* аргумента из произведения категорий $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$, $\mathcal{C}^*\times\mathcal{D}$, $\mathcal{C}\times\mathcal{D}^*$, либо $\mathcal{C}^*\times\mathcal{D}^*$. Таким образом, изучать бифункторы как отдельные объекты не имеет смысла, хотя и бывает удобно считать, что мы работаем с функтором от нескольких аргументов.

5 Пределы и копределы

5.1 Универсальные объекты

Определение 5.1. $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ называется **универсальным отталкивающим объектом** (initial object), если для всякого объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует в точности один морфизм $X \xrightarrow{f} Y$.

$X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ называется **универсальным притягивающим объектом** (terminal object), если для всякого объекта $Y \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ существует в точности один морфизм $Y \xrightarrow{f} X$.

Если X одновременно является универсальным отталкивающим и притягивающим, то он называется **нулевым объектом**.

Понятно, что все универсальные отталкивающие (притягивающие) объекты единственны с точностью до единственного изоморфизма.

Примеры универсальных объектов:

1. В категории множеств $\mathcal{S}et$ пустое множество $\varnothing$ есть универсальный отталкивающий объект, а любое одноэлементное множество $\{*\}$ — универсальный притягивающий объект.
2. В категории множеств с отмеченной точкой $\mathcal{S}et_\bullet$ множество $\{\bullet\}$, состоящее из отмеченной точки, является одновременно универсальным отталкивающим и притягивающим объектом, то есть нулевым.
3. В категории групп $\mathcal{G}rp$ единичная группа $\{1\}$ является нулевым объектом.
4. В категории колец с единицей универсальным отталкивающим объектом является кольцо $\mathbb{Z}$, а универсального притягивающего объекта нет (?).

   В категории колец без единиц нулевое кольцо $\{0\}$ является нулевым объектом.
5. В категории предпорядка универсальными объектами являются наименьшие или наибольшие элементы.

5.2 Примеры универсальных конструкций

Фиксируем множество X и рассмотрим категорию $\mathcal{C}$, объектами которой являются все отображения вида $X \xrightarrow{\varphi} A$, где $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}b$ — абелева группа, а морфизмами являются множества

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X \xrightarrow{\varphi} A,\, X \xrightarrow{\psi} B) := \{A \xrightarrow{\eta} B \mid \varphi\eta = \psi\}.$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ A \arrow[rr, dashed, "\eta"'] & & B \end{tikzcd}$$

Универсальным отталкивающим объектом в такой категории будет **свободная абелева группа с базисом** X

$$\mathbb{Z}^{(X)} = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}.$$

Иначе говоря, это множество отображений $X \to \mathbb{Z}$, которые почти всюду нулевые, с поточечным сложением.

Для конечного множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ свободной абелевой группой будет $\mathbb{Z}^{\oplus n}$, и n называется ее **рангом**.

Упражнение 5.1. *Рассмотрим категорию отображений из конечного множества $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ в коммутативные кольца с единицей. Морфизмы в такой категории определим аналогичным образом. Есть ли в этой категории универсальный отталкивающий объект? Что это такое?*

5.3 Произведения и копроизведения

Определение 5.2. Пусть $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. **Произведением** A и B называется объект $A \times B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ с морфизмами $A \times B \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A$ и $A \times B \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} B$, такими что для всякого объекта $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любых морфизмов $T \xrightarrow{p} A$ и $T \xrightarrow{q} B$ существует единственный морфизм $T \xrightarrow{r} A \times B$, при котором $p = r \circ \mathrm{pr}_1$ и $q = r \circ \mathrm{pr}_2$.

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[ddl, bend right, "p"'] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\
 & A \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

Если произведение объектов существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма. Действительно, если есть два произведения P и P', то из универсального свойства в определении получается изоморфизм $P \cong P'$.

$$
\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, dashed, shift right, "r"'] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{pr}'_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{pr}'_2"] & \\
 & P \arrow[u, dashed, shift right, "s"'] \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "s"] \arrow[dd, bend right, "1_P"'] \arrow[dddl, bend right] \arrow[dddr, bend left] & \\
 & P' \arrow[d, "r"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & P \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, "r"] \arrow[dd, bend right, "1_{P'}"'] \arrow[dddl, bend right] \arrow[dddr, bend left] & \\
 & P \arrow[d, "s"] \arrow[ddl] \arrow[ddr] & \\
 & P' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

$$s\,r = 1_P, \quad r\,s = 1_{P'}.$$

Как обычно, объект, удовлетворяющий универсальному свойству, можно ввести как универсальный объект некоторой категории. Фиксируем категорию $\mathcal{C}$ и объекты $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Рассмотрим категорию $\mathcal{D}$, объектами которой являются тройки (T, p, q), где $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, а p и q — морфизмы в A и B:

$$
\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}
$$

Морфизмами $(T, p, q) \xrightarrow{\varphi} (T', p', q')$ между двумя такими тройками будут стрелки, при которых диаграмма коммутативна:

$$
\begin{tikzcd}
& T \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dl, "p"'] \arrow[drr, "q"] & T' \arrow[dll, "p'"'] \arrow[dr, "q'"] & \\
A & & & B
\end{tikzcd}
$$

Легко проверить, что $\mathcal{D}$ действительно образует категорию, и универсальный притягивающий объект в ней — это произведение $A \times B$.

Примеры:

1. Произведения существуют для любых объектов в категориях $\mathcal{S}et$ (декартово произведение множеств), $\mathcal{T}op$ (прямое произведение топологических пространств), $\mathcal{V}ect_k$ (прямое произведение векторных пространств), $\mathcal{G}rp$ (прямое произведение групп).

2. Если $\mathcal{C}$ — частично упорядоченное множество, то для объектов $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ прямое произведение есть наибольшая нижняя грань $a \cap b$. Понятно, что оно существует не всегда.

$$
\begin{tikzcd}
& & b \arrow[dl, dash] \\
a \arrow[r, dash] & a \cap b &
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 5.2. *Функтор* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, -)$, $\mathcal{C} \to \mathcal{S}et$, *представим iff в* $\mathcal{C}$ *существует произведение* $A \times B$.

Определение 5.3. Пусть $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. **Копроизведением** A и B называется объект $A \sqcup B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ с морфизмами $A \xrightarrow{i_1} A \sqcup B$ и $B \xrightarrow{i_2} A \sqcup B$, такими что для всякого объекта $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любых морфизмов $A \xrightarrow{p} T$ и $B \xrightarrow{q} T$ существует единственный морфизм $A \sqcup B \xrightarrow{r} T$, при котором $p = i_1 \circ r$ и $q = i_2 \circ q$.

$$
\begin{tikzcd}
& T & \\
& A \sqcup B \arrow[u, dashed, "r"] & \\
A \arrow[ur, "i_1"] \arrow[uur, bend left, "p"] & & B \arrow[ul, "i_2"'] \arrow[uul, bend right, "q"']
\end{tikzcd}
$$

Если копроизведение объектов существует, то оно единственно с точностью до единственного изоморфизма.

Примеры:

1. В категории $\mathcal{S}et$ копроизведение — это дизъюнктное объединение множеств

$$A \sqcup B := \{1\} \times A \,\cup\, \{2\} \times B.$$

2. В категории $\mathcal{S}et_\bullet$ копроизведение — это дизъюнктное объединение, склеивающее отмеченные точки.

3. В категории $\mathcal{T}op$ копроизведение — это дизъюнктное объединение топологических пространств.

4. В категории $\mathcal{G}rp$ копроизведение — это свободное произведение групп $A * B$.

5. В категории $\mathcal{Ab}$ копроизведение, а также произведение — это прямая сумма абелевых групп $A \oplus B$.

6. В частично упорядоченном множестве копроизведение $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — это наименьшая верхняя грань $a \cup b$.

$$\begin{tikzcd}
& a \cup b \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
a & & b
\end{tikzcd}$$

7. В категории $\mathcal{Ring}$ копроизведение — это тензорное произведение колец $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Произведение и копроизведение можно определить для произвольного семейства объектов.

Определение 5.4. Пусть $(A_i)_{i \in I}$ — семейство объектов в категории $\mathcal{C}$. Их **произведением** называется объект $\prod_{i \in I} A_i \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ с морфизмами $\prod_{i \in I} A_i \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} A_j$, такими что для всякого объекта $T \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любого семейства морфизмов $T \xrightarrow{p_j} A_j$ существует единственный морфизм $T \xrightarrow{r} \prod_{i \in I} A_i$, при котором $p_j = r \circ \mathrm{pr}_j$ для всех $j \in I$.

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "p_j"'] \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
A_j & & \prod_{i \in I} A_i \arrow[ll, "\mathrm{pr}_j"]
\end{tikzcd}$$

Упражнение 5.3. *Показать, что произведения ассоциативны:*

$$A \times B \times C \cong (A \times B) \times C \cong A \times (B \times C).$$

Понятно, как соответствующим образом определить копроизведение $\coprod_{i \in I} A_i$, а также определить произведения (копроизведения) семейств как универсальные объекты в некоторой специальной категории.

В категории $\mathcal{Ab}$ вообще говоря $\prod_{i \in I} A_i \ncong \coprod_{i \in I} A_i$, если I бесконечно. Например, если $I \cong \mathbb{N}$, то произведение $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ есть множество всех последовательностей с покомпонентным сложением, а копроизведение $\coprod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ есть множество всех последовательностей, в которых почти все элементы нулевые, то есть прямая сумма $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Если A_i счетные, то это разные вещи по соображениям мощности ($\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ несчетно, а $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ счетно).

В частном случае $I = \varnothing$ произведение по определению дает универсальный притягивающий объект категории, а копроизведение — универсальный отталкивающий.

5.4 Расслоенные произведения и копроизведения

Теперь мы рассмотрим обобщение произведений и копроизведений.

Определение 5.5. Фиксируем категорию и ее объекты A, B, C, а также пару морфизмов $A \xrightarrow{f} C$ и $B \xrightarrow{g} C$. **Расслоенным произведением** A и B над C называется объект $A \times_C B$ с морфизмами $A \times_C B \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} A$ и $A \times_C B \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} B$, такими что для всякого объекта T и любых морфизмов $T \xrightarrow{p} A$ и $T \xrightarrow{q} B$, при которых $p \circ f = q \circ g$, существует единственный морфизм $T \xrightarrow{r} A \times_C B$, такой что $p = r \circ \mathrm{pr}_1$ и $q = r \circ \mathrm{pr}_2$.

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "r"] \arrow[drr, bend left, "q"] \arrow[ddr, bend right, "p"'] & & \\
& A \times_C B \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

Квадрат в этой диаграмме называется **декартовым квадратом**, или **коуниверсальным квадратом**, или **pullback**'ом. Так же могут называть $A \times_C B$.

Аналогично определяется **расслоенное копроизведение** $A \sqcup_C B$:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left, "q"] & \\
A \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right, "p"'] & A \sqcup_C B \arrow[dr, dashed, "r"] & \\
& & T
\end{tikzcd}
$$

Квадрат в этой диаграмме называется **декартовым коквадратом**, или **универсальным квадратом**, или **pushout**'ом.

Упражнение 5.4. *Стрелка* $A \xrightarrow{f} B$ *является эпиморфизмом iff следующий квадрат универсален:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "1_B"] \\
B \arrow[r, "1_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

Примеры:

1. Pullback в категории $\mathcal{Set}$ есть

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

2. Pushout в категории $\mathcal{Set}$ есть

$$A \sqcup_C B = A \sqcup B/\sim,$$

где $i_1(f(c)) \sim i_2(g(c))$.

3. Pushout в категории $\mathcal{Ring}$ есть тензорное произведение $A \otimes_C B$.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & A \otimes_C B \arrow[dr, dashed] & \\
& & T
\end{tikzcd}
$$

4. Если в категории существует универсальный притягивающий объект, то pullback над ним является произведением.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& A \times B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}$$

5. Если в категории существует универсальный отталкивающий объект, то pushout над ним является копроизведением.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & A \sqcup B \arrow[dr, dashed] & \\
& & T
\end{tikzcd}$$

5.5 Пределы и копределы

Рассмотрим проекцию $S \xrightarrow{p} S/{\sim}$ множества S на фактормножество $S/{\sim}$ по отношению эквивалентности $\sim$. Для всякого отображения $S \xrightarrow{f} X$, такого что

$$s \sim s' \Rightarrow f(s) = f(s'), \tag{*}$$

найдется единственное отображение $S/{\sim} \xrightarrow{\widetilde{f}} X$, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & S/{\sim} \arrow[d, dashed, "\widetilde{f}"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Благодаря такому универсальному свойству, мы можем рассмотреть категорию, объектами которой являются отображения $S \xrightarrow{f} X$, для которых выполняется (*), а морфизмами — отображения $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2$, при которых следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & X_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
& X_2
\end{tikzcd}$$

Тогда универсальный отталкивающий объект в этой категории — фактормножество и проекция на него $S \xrightarrow{p} S/{\sim}$.

Аналогично получается конструкция факторгруппы (работаем в категории $\mathcal{G}rp$ и фиксируем группу G с нормальной подгруппой $N \trianglelefteq G$, а от гомоморфизмов f требуем $N \leq \ker f$).

1 ноября речь шла о пределах и копределах; также были определены естественные преобразования. Конспекта нет, но ниже для полноты приводятся какие-то общие слова насчет пределов. Определение естественного преобразования можно найти в дальнейших лекциях. Слушатели могут прислать свои записки в группу `coxeter@googlegroups.com`.

Определение 5.6. Диаграммой в категории $\mathcal{C}$ называется ковариантный функтор $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Категория $\mathcal{J}$ называется **индексирующей**.

В частности, если $\mathcal{J}$ — дискретная категория (нет никаких морфизмов кроме кроме тождественных), то это всё означает, что мы индексируем класс $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ другим классом $\mathrm{Ob}(\mathcal{J})$.

Замечание. Естественное преобразование двух диаграмм можно считать морфизмом между ними, и диаграммы образуют категорию $\mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{C})$. Что это всё такое — см. ниже в разделе «2-категории».

Определение 5.7. Для диаграммы $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ **конусом** называется объект $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ вместе с семейством морфизмов $C \xrightarrow{\varphi_X} F(X)$ для всех $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, таким что для всякого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ из $\mathcal{J}$ следующая диаграмма в $\mathcal{C}$ коммутативна:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Определение 5.8. Пределом диаграммы $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ называется такой конус (C, φ), что для любого другого конуса (C', φ') найдется единственный морфизм $C' \xrightarrow{r} C$, такой что для всякого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ выполняется $r\,\varphi_X = \varphi'_X$:

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[dl, "\varphi'_X"'] \arrow[d, dashed, "\exists! r"] \\ F(X) & C \arrow[l, "\varphi_X"] \end{tikzcd}$$

Таким образом, возникают коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} & C' \arrow[ddl, bend right, "\varphi'_X"'] \arrow[d, dashed, "\exists! r"] \arrow[ddr, bend left, "\varphi'_Y"] & \\ & C \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$$

Если индексирующая категория $\mathcal{J}$ конечная (счетная), то и предел называют **конечным** (**счетным**).

1. Если $\mathcal{J}$ — категория без объектов, то для всякой категории $\mathcal{C}$ существует единственная **пустая диаграмма** $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Конус над такой диаграммой — это просто объект $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Предел пустой диаграммы — это универсальный притягивающий объект.

2. Если $\mathcal{J}$ — дискретная категория (все стрелки — тождественные 1_X), то диаграмма $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ в точности индексирует объекты $\mathcal{C}$. Предел такой диаграммы называется **произведением** объектов, индексированных $\mathcal{J}$. В частности, таким образом получается определенное ранее произведение пары объектов из $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & A \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

3. Возьмем теперь такую диаграмму: пусть $\mathcal{J}$ индексирует в точности три объекта $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, и только две стрелки $A \xrightarrow{f} C$ и $B \xrightarrow{g} C$ (не считая тождественных). Пределом этой диаграммы будет расслоенное произведение $A \times_C B$ (pullback):

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, "\varphi_B"] \arrow[d, "\varphi_A"'] \arrow[dr, "\varphi_C"] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Если теперь развернуть стрелки, то получатся *ко*конусы и *ко*пределы.

Определение 5.9. Для диаграммы $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ **коконусом** называется объект $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ вместе с семейством морфизмов $F(X) \xrightarrow{\varphi_X} C$ для всех $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$, таким что для всякого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ из $\mathcal{J}$ следующая диаграмма в $\mathcal{C}$ коммутативна:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\varphi_Y"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Определение 5.10. Копределом диаграммы $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ называется такой коконус (C, φ), что для любого другого коконуса (C', φ') найдется единственный морфизм $C \xrightarrow{r} C'$, такой что для всякого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ выполняется $\varphi_X\, r = \varphi'_X$:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[dr, "\varphi'_X"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists! r"] \\ & C' \end{tikzcd}$$

Таким образом, возникают коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_X"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi'_X"'] & & F(Y) \arrow[dl, "\varphi_Y"'] \arrow[ddl, bend left, "\varphi'_Y"] \\ & C \arrow[d, dashed, "\exists! r"] & \\ & C' & \end{tikzcd}$$

1. Если $\mathcal{J}$ — категория без объектов, то для всякой категории $\mathcal{C}$ существует единственная **пустая диаграмма** $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Коконус над такой диаграммой — это просто объект $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Копредел пустой диаграммы — это универсальный отталкивающий объект.

2. Если $\mathcal{J}$ — дискретная категория, то диаграмма $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ в точности индексирует объекты $\mathcal{C}$. Копредел такой диаграммы называется **копроизведением** объектов, индексированных $\mathcal{J}$. В частности, таким образом получается определенное ранее копроизведение пары объектов из $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i_1"'] \arrow[ddr, bend right] & & B \arrow[dl, "i_2"] \arrow[ddl, bend left] \\
& A \sqcup B \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& \bullet &
\end{tikzcd}$$

3. Возьмем теперь такую диаграмму: пусть $\mathcal{J}$ индексирует в точности три объекта $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, и только две стрелки $C \xrightarrow{f} A$ и $C \xrightarrow{g} B$ (не считая тождественных). Копределом этой диаграммы будет расслоенное копроизведение $A \sqcup_C B$ (pushout):

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\varphi_C"] & B \arrow[d, "\varphi_B"] \arrow[ddr, bend left] & \\
A \arrow[r, "\varphi_A"'] \arrow[drr, bend right] & A \sqcup_C B \arrow[dr, dashed] & \\
& & \bullet
\end{tikzcd}$$

5.6 Обратные и прямые пределы

В качестве индексирующей категории $\mathcal{J}$ может выступать частично упорядоченное множество $(J, \leq)$ (в категории $\mathcal{J}$ стрелка $i \to j$ будет означать $i \leq j$). Тогда копредел диграммы $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ называется **прямым пределом** (**инъективным пределом**, $\varinjlim$).

Конструкцию прямого предела можно пересказать чуть подробнее.

Определение 5.11. **Направленным множеством** называется непустое частично упорядоченное множество $(J, \leq)$, в котором для любых $i, j \in J$ найдется $k \in J$, такой что $i \leq k$ и $i \leq k$.

Определение 5.12. Пусть имеется направленное множество $(J, \leq)$ и задано семейство $\{X_i\}_{i \in J}$ объектов категории $\mathcal{C}$, так что выполняются следующие свойства:

1. Для всех $i \leq j$ задан морфизм $X_i \xrightarrow{f^i_j} X_j$.

2. Для всех $i \leq j \leq k$ выполнено

$$f^i_j f^j_k = f^i_k,$$
$$f^i_i = 1_{X_i}.$$

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f^i_j"] \arrow[dr, "f^i_k"'] & & X_j \arrow[dl, "f^j_k"] \\
& X_k &
\end{tikzcd}$$

Тогда говорят, что морфизмы f^i_j образуют **прямое семейство** (*directed family*).

На последней диаграмме изображен коконус. Если взять копредел по ним (универсальный отталкивающий коконус), то получится объект

$$X =: \varinjlim_{i \in J} X_i.$$

— **прямой предел** соответствующего семейства объектов и морфизмов.

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "f^i_j"] \arrow[dr, "f^i"'] \arrow[ddr, bend right] & & X_j \arrow[dl, "f^j"] \arrow[ddl, bend left] \\
& X \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\
& \bullet &
\end{tikzcd}$$

Простой пример: пусть X_i — множества, частично упорядоченные по включению, и пусть они образуют прямое семейство. Тогда

$$\varinjlim X_i = \bigcup_i X_i.$$

Прямые пределы существуют в категории $\mathscr{Ab}$ абелевых групп и вообще в категории R-$\mathscr{Mod}$ модулей над кольцом.

Если, как и выше, индексирующая категория $\mathscr{J}$ является частично упорядоченным множеством, то предел диаграммы $F\colon \mathscr{J}^* \to \mathscr{C}$ называется **обратным пределом** (**проективным пределом**, $\varprojlim$). Это можно описать подробнее.

Определение 5.13. Пусть имеется направленное множество $(J, \leq)$ и задано семейство $\{X_i\}_{i \in J}$ объектов категории $\mathscr{C}$, так что выполняются следующие свойства:

1. Для всех $i \leq j$ задан морфизм $X_j \xrightarrow{f^j_i} X_i$.
2. Для всех $i \leq j \leq k$ выполнено

$$f^k_j\, f^j_i = f^k_i,$$
$$f^i_i = 1_{X_i}.$$

$$\begin{tikzcd}
& X_k \arrow[dl, "f^k_i"'] \arrow[dr, "f^k_j"] & \\
X_i & & X_j \arrow[ll, "f^j_i"]
\end{tikzcd}$$

Тогда говорят, что морфизмы f^j_i образуют **обратное семейство** (*inverse family*).

На последней диаграмме изображен конус. Если взять предел по ним (универсальный притягивающий конус), то получится объект

$$X =: \varprojlim_{i \in J} X_i.$$

— **обратный предел** соответствующего семейства объектов и морфизмов.

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
& X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\
X_i & & X_j \arrow[ll, "f_i^j"]
\end{tikzcd}$$

Обратные пределы существуют в категории групп $\mathcal{Grp}$, категории R-$\mathcal{Mod}$ модулей над кольцом, а также в категории колец $\mathcal{Ring}$.

Скажем, в категории $\mathcal{Grp}$ это описывается так. Пусть задана обратная система групп G_i. Возьмем их произведение $G := \prod G_i$ и рассмотрим множество элементов

$$\Gamma := \{(x_i)_{i \in G_i} \mid f_i^j(x_j) = x_i \text{ для всех } i \leq j\}.$$

Можно убедиться, что $\Gamma \leq G$ — подгруппа. Это и есть обратный предел $\varprojlim G_i$. Аналогично устроен обратный предел в R-$\mathcal{Mod}$ и $\mathcal{Ring}$.

- Фиксируем простое число p. Для всяких $m \leq n$ существует канонический сюръективный гомоморфизм колец

  $$f_m^n \colon \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}.$$

  Обтратный предел такой системы

  $$\mathbb{Z}_p := \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

  называется **кольцом p-адических чисел**.

- Для всяких $m \leq n$ существует канонический гомоморфизм колец

  $$f_m^n \colon k[t]/(t^n) \to k[t]/(t^m).$$

  Кольцо формальных степенных рядов от t есть обратный предел такой системы:

  $$k[[t]] = \varprojlim k[t]/(t^n).$$

6 Дополнительные примеры произведений в различных категориях

6.1 Произведение в категории $\mathcal{Set}_\bullet$

В категории $\mathcal{Set}_\bullet$ прямое произведение устроено так:

$$(X, x) \times (Y, y) = (X \times Y /\sim,\ (x, y)),$$

где $\sim$ — отношение эквивалентности, порожденное отношением

$$(u, v) \sim (w, z), \text{ если } u = w = x \text{ или } v = z = y.$$

Например, если взять две окружности с отмеченной точкой, то их прямое произведение — тор. Далее отношение $\sim$ говорит нам, что нужно стянуть в точку параллель и меридиан. После этого топологически получится сфера.

6.2 Функториальность прямого произведения

Важно, что прямое произведение функториально. То есть, если предположить, что в категории $\mathcal{C}$ существуют все конечные произведения, то мы имеем *функтор*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C}\times\mathcal{C} & \to & \mathcal{C}, \\ (X,Y) & \rightsquigarrow & X\times Y, \\ (U\xrightarrow{f}X,\ V\xrightarrow{g}Y) & \rightsquigarrow & U\times V\xrightarrow{f\times g}X\times Y. \end{array}$$

В частности, прямое произведение функториально в категории $\mathcal{S}et$, в отличие от операций $\cap$ и $\cup$. (Что бы тогда значило $U\cap V\xrightarrow{f\cap g}X\cap Y$?)

6.3 Произведение в категории метрических пространств

Категория метрических пространств имеет в качестве объектов метрические пространства (в обычном понимании), а стрелки могут вводиться различным образом, в зависимости от контекста:

1. **Сжимающие отображения**, т.е. такие $X\xrightarrow{f}Y$, что для всех $x,y\in X$

$$d_Y(f(x),f(y))\le d_X(x,y).$$

   Изоморфизмами в такой категории будут **изометрии** (биекции, сохраняющие расстояния).

2. **Липшицевы отображения**, т.е. такие $X\xrightarrow{f}Y$, для которых найдется константа $C=C(f)$, такая что для всех $x,y\in X$

$$d_Y(f(x),f(y))\le C\cdot d_X(x,y).$$

   Изоморфизмы в такой категории — это **билипшицевы отображения**, т.е. те, для которых выполняется

$$C_1\cdot d_X(x,y)\le d_Y(f(x),f(y))\le C_2\cdot d_X(x,y).$$

3. **Гёльдеровы отображения**, т.е. такие $X\xrightarrow{f}Y$, для которых найдется константа $C=C(f)$ и $a=a(f)\le 1$, такая что для всех $x,y\in X$

$$d_Y(f(x),f(y))\le C\cdot d_X(x,y)^a.$$

Произведением в категории метрических пространств будет метрическое пространство

$$(X,d_X)\times(Y,d_Y)=(X\times Y,d_{X\times Y}),$$

где на роль $d_{X\times Y}$ могут подойти существенно разные метрики:

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=(d_X(x_1,x_2)^C+d_Y(y_1,y_2)^C)^{1/C}.$$

- При $C=1$ получается **taxi-cab metric** (**манхэттенская**):

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=d_X(x_1,x_2)+d_Y(y_1,y_2).$$

- При $C=\infty$ получается **метрика Чебышёва**:

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),\ (x_2,y_2))=\max\{d_X(x_1,x_2),\ d_Y(y_1,y_2)\}.$$

- <u>При $C = 2$</u> получается **Евклидова метрика**:

$$d_{X\times Y}((x_1, y_1),\ (x_2, y_2)) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}.$$

Упражнение 6.1. *Какую из этих метрик нужно взять для прямого произведения в категории метрических пространств и сжимающих отображений?*

Упражнение 6.2. *В категории метрических пространств и липшицевых отображений все эти метрики подходят для прямого произведения, и они являются изоморфными.*

6.4 Произведения в категории $\mathcal{Ord}$ и $\mathcal{LOrd}$

$\mathcal{Ord}$ — это категория частично упорядоченных множеств. $\mathcal{LOrd}$ — категория линейно упорядоченных множеств (добавляется аксиома $\forall x \forall y \forall z\ x < y \vee x = y \vee y < x$).

Произведение в категории $\mathcal{Ord}$ выглядит так:

$$(X, \leq_X) \times (Y, \leq_Y) = (X \times Y, \leq),$$

где

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq y_2 \text{ и } y_1 \leq y_2.$$

См. книгу *Биркгофф, Теория структур.*

Копроизведение в категории $\mathcal{Ord}$ выглядит так:

$$(X, \leq_X) \sqcup (Y, \leq_Y) = (X \sqcup Y, \leq),$$

где

$$z \leq w \iff \begin{cases} z, w \in X \text{ и } z \leq_X w, \\ z, w \in Y \text{ и } z \leq_Y w. \end{cases}$$

Упражнение 6.3. *Существуют ли произведения и копроизведения в категории $\mathcal{LOrd}$?*

В качестве кандидатов на порядок можно рассмотреть

- **Лексикографический порядок** на $X \times Y$:

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff x_1 \leq x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2).$$

- **Порядок ординальной суммы** на $X \sqcup Y$:

$$z \leq w \iff \begin{cases} z, w \in X \text{ и } z \leq_X w, \\ z, w \in Y \text{ и } z \leq_Y w, \\ z \in X, w \in Y. \end{cases}$$

Ординальная сумма не коммутативна. Например, $1 + \omega$ и $\omega + 1$, где ω — порядковый тип $\mathbb{N}$, являются разными ординалами.

6.5 Произведения в категории $\mathcal{CompTop}$

Существование произведений и копроизведений в категории $\mathcal{CompTop}$ компактных хаусдорфовых топологических пространств — это две знаменитые теоремы.

- **Теорема Тихонова**:

$$\prod_{i\in I} {}_{\mathcal{Top}} X_i = \prod_{i\in I} {}_{\mathcal{CompTop}} X_i.$$

- **Теорема Стоуна–Чеха**:

$$\coprod_{i\in I}{}_{\mathcal{Top}} \text{Компактификация Чеха для } X_i = \coprod_{i\in I}{}_{\mathcal{CompTop}} X_i.$$

6.6 Произведения в категории $\mathcal{DAb}$

Категория $\mathcal{DAb}$ **дифференциальных абелевых групп** имеет в качестве объектов (A, d), где $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{Ab})$, а $A \xrightarrow{d} A$ — **дифференциал**, то есть такое отображение, что $d^2 = 0$, иначе говоря, $\operatorname{im} d \leq \ker d$.

Факторгруппа $H(A, d) := \ker(d)/\operatorname{im}(d)$ называется **группой гомологий**.

Морфизмами в категории $\mathcal{DAb}$ являются стрелки, коммутирующие с дифференциалами:

$$(A, d_A) \xrightarrow{f} (B, d_B)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "d_A"'] & B \arrow[d, "d_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

$$f\, d_A = d_B\, f.$$

Упражнение 6.4. *Описать произведения и копроизведения в категории* $\mathcal{DAb}$.

6.7 Корасслоенные произведения в категории $\mathcal{Grp}$

В категории групп существуют произвольные корасслоенные произведения.

Мы уже рассматривали свободное произведение.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ G \arrow[r] & H * G \end{tikzcd}$$

Например, $C_2 * C_3 \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Это частный случай корасслоенного произведения.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] \\ G \arrow[r] & H *_F G \end{tikzcd}$$

Например, $C_4 *_{C_2} C_6 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. См. книгу Jean-Pierre Serre, *Trees*.

Эта конструкция называется **amalgamated product** (**свободное произведение с объединенной подгруппой**). Для $F \leq G$ и $F \leq H$ элементами $H *_F G$ являются классы слов вида $x_1\, x_2 \cdots x_s$, где $x_i \in H$ или G. На них вводятся такие же отношения, что и в свободном произведении $H * G$, и еще добавляются отношения

$$i(f)\, j(f)^{-1} = 1,$$

где $i\colon F \hookrightarrow G$, $j\colon F \hookrightarrow H$ — соответствующие вложения F, и $f \in F$.

7 Естественные преобразования

Определение 7.1. Естественное преобразование τ между функторами $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ сопоставляет каждому объекту $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ морфизм $F(X) \xrightarrow{\tau_X} G(X)$ (в категории $\mathcal{D}$), так что для всякого морфизма $X \xrightarrow{f} Y$ (в категории $\mathcal{C}$) следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

Обозначение: $\tau\colon F \Rightarrow G$.

Для естественных преобразований можно ввести композицию (даже двумя разными способами). Об этом см. ниже раздел «2-категории».

7.1 Пример: естественный изоморфизм векторных пространств $V^{**} \cong V$

Как известно, конечномерное векторное пространство изоморфно своему двойственному:

$$\mathrm{Hom}(V, k) =: V^* \cong V.$$

Но этот изоморфизм не является естественным! У нас имеется контравариантный функтор

$$\begin{aligned} V \quad &\rightsquigarrow \quad V^*, \\ U \xrightarrow{f} V \quad &\rightsquigarrow \quad V^* \xrightarrow{f^*} U^*. \end{aligned}$$

V является объектом в категории $\mathcal{vect}_k$ конечномерных[1] векторных пространств над k, а V^* — объектом *двойственной* категории. Даже над полем следует различать левые и правые векторные пространства.

Изоморфизм $V^{**} \cong V$ уже естественный. А именно, ковариантный функтор $V \rightsquigarrow V^{**}$ естественно эквивалентен тождественному функтору $\mathbf{1}_{\mathcal{vect}_k}$.

8 2-категории

Для естественных преобразований можно ввести две композиции: вертикальную $\obar$ и горизонтальную $\ominus$.

8.1 Вертикальная композиция естественных преобразований

Определение 8.1. Если имеются естественные преобразования $\sigma\colon F \Rightarrow G$ и $\tau\colon G \Rightarrow H$ между функторами $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, то для них определена **вертикальная композиция** $\sigma \obar \tau\colon F \Rightarrow H$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=70, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=70, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\tau\Downarrow"] & \mathcal{D} & \rightsquigarrow & \mathcal{C} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, bend right=40, "H"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\obar\tau\Downarrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

[1]Не путать с надкатегорией $\mathcal{Vect}_k$ векторных пространств над k.

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\sigma_X"'] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "(\sigma \varobar \tau)_X =:"'] & F(Y) \arrow[d, "\sigma_Y"] \arrow[dd, dashed, bend left=60, ":= (\sigma \varobar \tau)_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "\tau_X"'] & G(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\
H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y)
\end{tikzcd}
$$

$$F(X) \xrightarrow{(\sigma \varobar \tau)_X} H(X) := F(X) \xrightarrow{\sigma_X} G(X) \xrightarrow{\tau_X} H(X).$$

Упражнение 8.1 (Ассоциативность вертикальной композиции)**.** *Показать, что для трех естественных преобразований* $F \overset{\rho}{\Rightarrow} G \overset{\sigma}{\Rightarrow} H \overset{\tau}{\Rightarrow} I$

$$(\rho \varobar \sigma) \varobar \tau = \rho \varobar (\sigma \varobar \tau).$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=80, "F" name=F] \arrow[r, bend left=25, "G" name=G] \arrow[r, bend right=25, "H"' name=H] \arrow[r, bend right=80, "I"' name=I] & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\rho"']
\arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\sigma"']
\arrow[from=H, to=I, Rightarrow, "\tau"']
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 8.2. *Для естественного преобразования* $F \overset{\sigma}{\Rightarrow} G$

$$\mathbb{1}_F \varobar \sigma = \sigma \varobar \mathbb{1}_G = \sigma.$$

Определение 8.2. Для категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ «категория» $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} := \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ имеет в качестве объектов функторы $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, а в качестве морфизмов — естественные преобразования функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F, G) = \mathrm{Nat}(F, G).$$

В качестве композиции морфизмов используется $\varobar$.

В качестве единичных морфизмов выступают тождественные естественные преобразования $\mathbb{1}_F \in \mathrm{Nat}(F, F)$.

$\mathrm{Nat}(F, G)$ не образует множество и даже класс, поэтому $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ — это не честная категория. Но если $\mathcal{C}$ — малая категория, то $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ — категория. Если $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — малые категории, то $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ — тоже малая категория.

8.2 Горизонтальная композиция естественных преобразований

Определение 8.3. Пусть имеются естественные преобразования $F \overset{\sigma}{\Rightarrow} G$, $H \overset{\tau}{\Rightarrow} I$ между функторами $\mathcal{C} \xrightarrow{F,G} \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \xrightarrow{H,I} \mathcal{E}$. Тогда мы определим их **горизонтальную композицию** $F\,H \overset{\sigma \ominus \tau}{\Longrightarrow} G\,I$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "H"] \arrow[r, bend right=50, "I"'] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & \mathcal{E} & \rightsquigarrow & \mathcal{C} \arrow[rr, bend left=30, "F\,H"] \arrow[rr, bend right=30, "G\,I"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma\ominus\tau\Downarrow"] & & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

Стрелка $FH(X) \xrightarrow{(\sigma \ominus \tau)_X} GI(X)$ получается следующим образом:

$$
\begin{tikzcd}
FH(X) \arrow[r, "H(\sigma_X)"] \arrow[d, "\tau_{F(X)}"'] \arrow[dr, dashed, "(\sigma\ominus\tau)_X"] & GH(X) \arrow[d, "\tau_{G(X)}"] \\
FI(X) \arrow[r, "I(\sigma_X)"'] & GI(X)
\end{tikzcd}
$$

$$(\sigma \ominus \tau)_X = H(\sigma_X) \circ \tau_{G(X)} = \tau_{F(X)} \circ I(\sigma_X).$$

Упражнение 8.3. *Построить естественный квадрат для $\sigma \ominus \tau$.*

Упражнение 8.4 (Ассоциативность горизонтальной композиции)**.** *Показать, что для трех естественных преобразований ρ, σ, τ*

$$(\rho \ominus \sigma) \ominus \tau = \rho \ominus (\sigma \ominus \tau).$$

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\rho\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\tau\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 8.5. *Для естественного преобразования $F \overset{\sigma}{\Rightarrow} G$*

$$\mathbb{1}_F \ominus \sigma = \sigma \ominus \mathbb{1}_G = \sigma.$$

8.3 Определение 2-категории

Пусть имеется следующая диаграмма:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\rho\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\tau\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\omega\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

Можно взять сначала вертикальные композиции, а потом горизонтальную:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\rho\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\tau\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\omega\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\rho\obar\sigma\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "I"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\tau\obar\omega\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F\,I"] \arrow[r, bend right, "H\,K"'] \arrow[r, phantom, "(\rho\obar\sigma)\ominus(\tau\obar\omega)\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

Можно наоборот, начать с горизонтальных композиций, а потом взять вертикальную:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\rho\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "I"] \arrow[r, "J"] \arrow[r, bend right=60, "K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\tau\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\omega\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F\,I"] \arrow[r, "G\,J"] \arrow[r, bend right=60, "H\,K"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\rho\obar\tau\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\obar\omega\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F\,I"] \arrow[r, bend right, "H\,K"'] \arrow[r, phantom, "(\rho\ominus\tau)\obar(\sigma\ominus\omega)\Downarrow"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
$$

2-ассоциативностью называется условие

$$(\rho \obar \sigma) \ominus (\tau \obar \omega) = (\rho \ominus \tau) \obar (\sigma \ominus \omega).$$

Определение 8.4. 2-категория задается

- **объектами**,
- **морфизмами** $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ между объектами $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$,
- **2-морфизмами** $F \overset{\tau}{\Rightarrow} G$ между морфизмами $\mathcal{C} \xrightarrow{F,G} \mathcal{D}$,
- тремя **композициями**: $\circ$ для морфизмов; вертикальной $\varobar$ и горизонтальной $\ominus$ для 2-морфизмов.

При этом

- Различные множества морфизмов (2-морфизмов) не пересекаются.
- Для каждого объекта $\mathcal{C}$ задан тождественный морфизм $\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$.
- Для каждого морфизма F задан тождественный 2-морфизм $\mathbb{1}_F$.
- Выполняются четыре закона ассоциативности (ассоциативность $\circ$, ассоциативность $\ominus$, ассоциативность $\varobar$; 2-ассоциативность):

$$(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H), \tag{1}$$
$$(\rho \varobar \sigma) \varobar \tau = \rho \varobar (\sigma \varobar tau), \tag{2}$$
$$(\rho \ominus \sigma) \ominus \tau = \rho \ominus (\sigma \ominus tau), \tag{3}$$
$$(\rho \varobar \sigma) \ominus (\tau \varobar \omega) = (\rho \ominus \tau) \varobar (\sigma \ominus \omega). \tag{4}$$

Основной пример — это 2-категория, состоящая из категорий, функторов и естественных преобразований между ними. (Различные теоретико-множественные вопросы, связанные с определением 2-категории, мы здесь не обсуждаем.)

О 2-категориях и n-категориях можно прочитать по ссылкам с домашней страницы Дж. Баеза: `http://math.ucr.edu/home/baez/`.

9 Лемма Ионеды

Пусть $\mathcal{C}$ — категория, $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, и $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ — ковариантный функтор. Возникает задача: описать естественные преобразования $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \Rightarrow F$.

Теорема 9.1 (Лемма Ионеды)**.** *Все естественные преобразования* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \Rightarrow F$ *находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами* $x \in F(X)$.

Доказательство.

1. Если задано естественное преобразование $\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \Rightarrow F$, то рассмотрим отображение $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X) \xrightarrow{\tau_X} F(X)$. Его значением на элементе $1_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ будет некоторый элемент $x \in F(X)$:
$$x := \tau_X(1_X).$$
2. Если задан элемент $x \in F(X)$, то определим естественное преобразование $\tau\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \cdot) \Rightarrow F$. Для каждого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ зададим отображение
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & F(Y), \\ X \xrightarrow{f} Y & \mapsto & F(f)(x). \end{array}$$
Проверим естественность:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \arrow[r, "\tau_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,g)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \arrow[r, "\tau_Z"'] & F(Z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & F(f)(x) \arrow[d, mapsto] \\
f\,g \arrow[r, mapsto] & F(g)(F(f)(x)) = F(f\,g)(x)
\end{tikzcd}
$$

3. Убедимся, что определенные сопоставления взаимно обратные.

   - Элементу $x \in F(X)$ соответствует естественное преобразование $X \xrightarrow{f} Y \mapsto F(f)(x)$. Ему соответствует элемент $F(1_X)(x) = 1_{F(X)}(x) = x$.
   - Естественному преобразованию $\tau_Y : X \xrightarrow{f} Y \mapsto \tau_Y(f)$ соответствует элемент $\tau_X(1_X)$. Этому элементу соответствует естественное преобразование $\omega_Y : X \xrightarrow{f} Y \mapsto F(f)(\tau_X(1_X))$.

$$\omega_Y(f) = F(f)(\tau_X(1_X)) = \tau_Y(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,f)(1_X)) = \tau_Y(f).$$

□

Упражнение 9.1. *Рассмотрим* $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *и морфизм* $X \xrightarrow{f} Y$. *Тогда для каждого* $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *имеем*

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,Z)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\
g & \mapsto & f\,g
\end{array}
$$

1. *Это естественное преобразование* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\cdot)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$.
2. *Если* f *— изоморфизм, то* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\cdot)$ *— естественная эквивалентность.*
3. *Каждое естественное преобразование* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$ *имеет вид* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\cdot)$ *для некоторого* $X \xrightarrow{f} Y$.
4. *Функторы* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\cdot)$ *и* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\cdot)$ *естественно эквивалентны iff* X *и* Y *изоморфны.*
5. *Композиция морфизмов* f *и* g *соответствует вертикальной композиции естественных преобразований* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f,\cdot)$ *и* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(g,\cdot)$.

Теорема 9.2 (Лемма Ионеды, уточненная формулировка)**.** *Пусть* $\mathcal{C}$ *— категория,* $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$ *— функтор. Имеется естественная биекция*

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-),F) \cong F(X).$$

То есть, она естественна относительно замен $X \xrightarrow{\varphi} X'$ *и относительно замен* $F \overset{\sigma}{\Rightarrow} G$*:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\varphi,-)\obar-"'] & F(X) \arrow[d, "F(\varphi)"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',-),F) \arrow[r, "\cong"'] & F(X')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-),F) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "-\obar\sigma"'] & F(X) \arrow[d, "\sigma_X"] \\
\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-),G) \arrow[r, "\cong"'] & G(X)
\end{tikzcd}
$$

Теорема 9.3 (Лемма Ионеды, альтернативная формулировка)**.** *Имеются два функтора:*

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{S}et) \times \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "N"] \arrow[r, bend right, "E"'] & \mathcal{S}et
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
E(F,X) & := & F(X), \\
N(F,X) & := & \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-),F).
\end{array}
$$

(На морфизмах эти функторы задаются очевидным образом.)

Существует естественный изоморфизм $N \overset{\alpha}{\Rightarrow} E$.

10 Сопряженные функторы

Вспомним конструкцию свободной абелевой группы.

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl] \arrow[d] \\
\mathbb{Z}^{(X)} \arrow[r, dashed] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl] \arrow[d, dashed] \\
\mathbb{Z}^{(X)} \arrow[r] & A
\end{tikzcd}
$$

Здесь $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}et)$ и $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}b)$. На первой диаграмме стрелка $\dashrightarrow$ является универсальным гомоморфизмом, а на второй — просто композицией.

Мы имеем естественную биекцию

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X,U(A)) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}b}(F(X),A), \\
X \to U(A) & \leftrightarrow & F(X) \to A, \\
\text{отображение} & & \text{гомоморфизм} \\
\text{множеств} & & \text{абелевых групп}
\end{array}
$$

где $U\colon \mathcal{A}b \to \mathcal{S}et$ — забывающий функтор, а $F\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{A}b$ — функтор $X \rightsquigarrow \mathbb{Z}^{(X)}$.

Этот пример приводит нас к важному понятию сопряженных функторов.

Определение 10.1. Пусть имеются встречные функторы F и G на категориях $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "G"]
\end{tikzcd}
$$

Говорят, что F — **левый сопряженный функтор** к G, а G — **правый сопряженный функтор** к F (обозначение $F \dashv G$), если для любых $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеется биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X),Y) \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,G(Y)),$$

естественная по X и по Y.

Естественность означает, что для любого морфизма $Y \xrightarrow{f} Y'$ в категории $\mathcal{C}$ и морфизма $X' \xrightarrow{g} X$ в категории $\mathcal{D}$ возникает коммутативная диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X),Y) \arrow[r, "\varphi_{X,Y}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X,G(Y)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X'),Y') \arrow[r, "\varphi_{X',Y'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X',G(Y'))
\end{tikzcd}
$$

Вертикальные стрелки устроены следующим образом:

$$
\begin{tikzcd}
F(X') \arrow[r, "F(g)"] \arrow[rrr, bend right, dashed] & F(X) \arrow[r] & Y \arrow[r, "f"] & Y'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "g"] \arrow[rrr, dashed, bend right] & X \arrow[r] & G(Y) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y')
\end{tikzcd}
$$

Иначе говоря, у нас имеются бифункторы $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, G(-))$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(-), -)\colon \mathcal{D}^* \times \mathcal{C} \to \mathcal{S}et$. Сопряжение $F \dashv G$ есть их естественный изоморфизм.

Если $F \dashv G$, то имеется биекция

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(X)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, G(F(X))), \\
1_{F(X)} & \mapsto & \varphi_{X,F(X)}(1_{F(X)}) =: \eta_X.
\end{array}
$$

Морфизм $X \xrightarrow{\eta_X} G(G(X))$ соответствует естественному преобразованию $\mathbf{1}_{\mathcal{D}} \overset{\eta}{\Rightarrow} F\,G$. Оно называется **единицей сопряжения**.

Двойственно, имеется биекция

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(Y), G(Y)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(G(Y)), Y), \\
1_{G(Y)} & \mapsto & \varphi_{G(Y),Y}(1_{G(Y)}) =: \varepsilon_Y.
\end{array}
$$

Морфизм $F(G(Y)) \xrightarrow{\varepsilon_Y} Y$ соответствует естественному преобразованию $G\,F \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$. Оно называется **коединицей сопряжения**.

Упражнение 10.1. *Следующее естественное преобразование является тождественным:*

$$F \xRightarrow{\eta \ominus \mathbb{1}_F} F\,G\,F \xRightarrow{\mathbb{1}_F \ominus \varepsilon} F.$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\mathbf{1}_{\mathcal{D}}"] \arrow[r, bend right, "F\,G"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\mathbb{1}_F\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\mathbb{1}_F\Downarrow"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "G\,F"] \arrow[r, bend right, "\mathbf{1}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[r, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
$$

Упражнение 10.2. *Если $F \dashv G$ и $F \dashv H$, то G и H изоморфны.*

10.1 Примеры сопряженных функторов

1. Имеем естественную биекцию

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(B \times A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(B, \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(A, C)).$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}et \arrow[r, bend left, "-\times A"] & \mathcal{S}et \arrow[l, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(A,-)"]
\end{tikzcd}
$$

$$- \times A \dashv \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(A, -).$$

Это верно для любой категории, в которой существуют конечные произведения.

2. Рассмотрим два встречных функтора

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}b \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{G}rp \arrow[l, bend left, "F"]
\end{tikzcd}
$$

Здесь U — забывающий функтор, а F — функтор абелианизации $G \rightsquigarrow G/[G,G]$.

Это универсальная конструкция в том смысле, что всякий морфизм $G \to A$ в абелеву группу пропускается через G^{ab}.

$$F \dashv U.$$

3. Рассмотрим два встречных функтора

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Grp} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{Mon} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Здесь U — забывающий функтор, а F — функтор $M \rightsquigarrow K(M)$ из моноида M в группу Гротендика $K(M)$.

Это универсальная конструкция в том смысле, что всякий морфизм $M \to G$ в группу пропускается через $K(M)$.

$$F \dashv U.$$

4. Рассмотрим два встречных функтора

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Top} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{Set} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Здесь U — забывающий функтор, а F — функтор, снабжающий множество дискретной топологией.

$$F \dashv U.$$

5. Пусть $\mathcal{CompHaus}$ — категория компактных хаусдорфовых пространств. Рассмотрим два встречных функтора

$$\begin{tikzcd} \mathcal{CompHaus} \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{Top} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Здесь U — забывающий функтор, а F — компактификация Стоуна–Чеха.

$$F \dashv U.$$

6. Пусть $\mathcal{Cat}$ — категория малых категорий. Рассмотрим встречные функторы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Cat} \arrow[r, bend left=50, "U"] \arrow[r, "\pi_0"] & \mathcal{Set} \arrow[l, bend left=20, "D"] \arrow[l, bend left=60, "A"] \end{tikzcd}$$

Здесь U — забывающий функтор, а π_0 — функтор компонент связности[2]; D снабжает множество структурой дискретной категории, а A — кодискретной[3].

$$\pi_0 \dashv D, \quad D \dashv U, \quad U \dashv A.$$

[2] Объекты X и Y называются **достижимыми**, если в $\mathcal{C}$ имеется связывающая их цепочка морфизмов (не обязательно однонаправленных).

[3] $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := X$ и $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) := \{(x,y)\}$ (это называется также **кодискретным группоидом** над X).

7. Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — отображение множеств. Множества подмножеств 2^X и 2^Y являются категориями, как частично упорядоченные множества. С ними связаны три функтора

$$\begin{tikzcd} 2^X \arrow[r, bend left, "f_*"] \arrow[r, "\mathrm{im}"] & 2^Y \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} f_*(M) &:= \{y \in Y \mid f^{-1}(\{y\}) \subseteq M\}, \\ \mathrm{im}(M) &:= \{f(x) \mid x \in M\}, \\ f^{-1}(N) &:= \{x \in X \mid f(x) \in N\}. \end{aligned}$$

$$\mathrm{im} \dashv f^{-1}, \quad f^{-1} \dashv f_*.$$

Определение 10.2. Если P и Q — частично упорядоченные множества и между ними имеются сопряженные встречные функторы

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "F"] & Q \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

$$F \dashv G,$$

то это называется **соответствием Галуа**.

При этом

$$F(a) \preceq b \iff a \preceq G(b).$$

8. Пусть $\mathcal{R}ing_\bullet$ — категория колец с отмеченной точкой. Рассмотрим два встречных функтора

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}ing_\bullet \arrow[r, bend left, "U"] & \mathcal{R}ing \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

Здесь U — функтор, забывающий отмеченную точку, а F — функтор $R \rightsquigarrow (R[x], x)$.

$$F \dashv U.$$

11 Эквивалентность и антиэквивалентность категорий

Вспомним, что категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **изоморфными** ($\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$), если существуют ковариантные функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, такие что $F\,G = \mathbf{1}_\mathcal{C}$ и $G\,F = \mathbf{1}_\mathcal{D}$.
$\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **антиизоморфными**, если $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^*$.

Если ослабить эти условия, то получается эквивалентность и антиэквивалентность.

Определение 11.1. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **эквивалентными** ($\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$), если существуют ковариантные функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, такие что $F\,G \cong \mathbf{1}_\mathcal{C}$ и $G\,F \cong \mathbf{1}_\mathcal{D}$.

В свою очередь $F\,G \cong \mathbf{1}_\mathcal{C}$ и $G\,F \cong \mathbf{1}_\mathcal{D}$ означает, что существуют естественные преобразования

1. $\sigma\colon F\,G \Rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{C}}$, $\sigma'\colon \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \Rightarrow F\,G$, такие что для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеем

$$\sigma_X\colon (F\,G)(X) \to X, \quad \sigma'_X\colon X \to (F\,G)(X),$$
$$\sigma_X\,\sigma'_X = 1_{(F\,G)(X)}, \quad \sigma'_X\,\sigma_X = 1_X.$$

2. $\tau\colon G\,F \Rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$, $\tau'\colon \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \Rightarrow G\,F$, такие что для каждого $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ имеем

$$\tau_X\colon (G\,F)(X) \to X, \quad \tau'_X\colon X \to (G\,F)(X),$$
$$\tau_X\,\tau'_X = 1_{(G\,F)(X)}, \quad \tau'_X\,\tau_X = 1_X.$$

Эквивалентность категорий является отношением эквивалентности в обычном смысле.

Определение 11.2. Категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются **антиэквивалентными**, если $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^*$. (Иначе говоря, можно в определении эквивалентности поменять ковариантные функторы на контравариантные.)

Определение 11.3. Категория $\mathcal{C}$ называется **скелетной**, если в ней нет нетривиальных изоморфизмов: т.е. для всех $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ выполняется $X \cong Y \Rightarrow X = Y$.

Скелетом $\mathrm{Sk}(\mathcal{C})$ категории $\mathcal{C}$ называется полная скелетная подкатегория в $\mathcal{C}$, такая что

$$\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\ \exists Y \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Sk}(\mathcal{C}))\ X \cong Y.$$

$\mathrm{Sk}(\mathcal{C})$ существует по аксиоме выбора для классов и единственен с точностью до изоморфизма.

Утверждение 11.1. *Имеется естественная эквивалентность* $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Sk}(\mathcal{C})$.

Утверждение 11.2. $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ *iff* $\mathrm{Sk}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Sk}(\mathcal{D})$.

Доказательство. Имеем $\mathrm{Sk}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} \simeq \mathrm{Sk}(\mathcal{D})$. Для скелетов из $\mathrm{Sk}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sk}(\mathcal{D})$ следует $\mathrm{Sk}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Sk}(\mathcal{D})$. □

Утверждение 11.3. $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}^*$ *iff* $\mathrm{Sk}(\mathcal{C}) \cong \mathrm{Sk}(\mathcal{D})^* \cong \mathrm{Sk}(\mathcal{D}^*)$.

Таким образом, мы получили еще одно определение эквивалентности. Рассмотрим примеры скелетов.

11.1 Скелет категории $\mathcal{S}et$

Определение 11.4. Множество $(X, <)$ называется **вполне упорядоченным**, если каждое его конечное подмножество содержит наименьший элемент.

Для всякого множества X существует порядок $<$, такой что $(X, <)$ вполне упорядоченное. (Этот факт эквивалентен аксиоме выбора.)

Определение 11.5. Множество X называется **транзитивным**, если

$$x \in X \text{ и } y \in x \;\Rightarrow\; y \in X.$$

Множество называется **ординалом**, если оно транзитивно и вполне упорядоченно по отношению $\in$.

- Класс всех ординалов транзитивный и вполне упорядоченный.
- Каждое вполне упорядоченное множество $(X, <)$ изоморфно какому-то ординалу $(\alpha, \in)$. Он называется **порядковым типом** для $(X, <)$.

- $(\alpha, \in) \cong (\beta, \in)$ iff $\alpha = \beta$.
- $\varnothing$ является наименьшим ординалом.
- Если α — ординал, то $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ — тоже ординал.
- Если C — множество ординалов, то $\delta := \bigcup\limits_{\alpha \in C} \alpha$ есть ординал и наименьшая верхняя граница ординалов из $\mathcal{C}$.

Отсюда получается описание ординалов: сначала идут **конечные ординалы**

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \varnothing, \\
\mathbf{1} &= \{\varnothing\}, \\
\mathbf{2} &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\
\mathbf{3} &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \\
&\vdots \\
\mathbf{n+1} &= \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n-1}\}.
\end{aligned}$$

Это натуральные числа. Следующим ординалом будет их объединение

$$\omega_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\}.$$

Определение 11.6. Для множества X за $|X|$ обозначается наименьший ординал α, для которого $(X, <) \cong (\alpha, \in)$.

$X \cong Y$ в категории $\mathcal{Set}$ iff $|X| = |Y|$.
Дальше ряд ординалов продолжается **первым несчетным ординалом**

$$\omega_1 := \{\alpha \mid |\alpha| \leq \omega_0\}.$$

И вообще рекурсивно определяется

$$\omega_{\alpha+1} := \{\delta \mid |\delta| = \omega_\alpha\}.$$

Если ординал $\alpha \neq \mathbf{0}$ не представляется в виде $\beta \cup \{\beta\}$, то он называется **предельным**. Для предельного α

$$\omega_\alpha := \sup_{\beta < \alpha} \omega_\beta.$$

Определение 11.7. **Кардиналом** называется такой ординал α, что $|\alpha| = \alpha$.

Определенные ω_α являются кардиналами, и для них используются обозначения $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$

Мы прерываем экскурс в теорию множеств и возвращаемся к теории категорий. В категории $\mathcal{Set}$ ординалы образуют полную подкатегорию $\mathcal{Ordin}$, причем это скелет. Таким образом, $\mathcal{Set} \simeq \mathcal{Ordin}$.
Аналогично $\mathcal{FinSet} \simeq \mathcal{FinOrdin}$.

11.2 Скелеты категории ${}_k\mathcal{vect}$ и $\mathcal{vect}_k$

Мы рассматриваем конечномерные векторные пространства над полем k. Как все знают, для них $U \cong V \iff \dim U = \dim V$.

Мы не делаем распространенную ошибку и не путаем категорию **левых векторных пространств** ${}_k\mathcal{vect}$ и категорию **правых векторных пространств** $\mathcal{vect}_k$. В левых пространствах морфизмы компонуются как $(x)(\varphi \circ \psi) = ((x)\varphi)\psi$, а в правых — как $(\varphi \circ \psi)(x) = \varphi(\psi(x))$.

Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ можем определить левое векторное пространство

$$ {}^n k := \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in k\}. $$

Получаем подкатегорию левых **арифметических векторных пространств** ${}_k\boldsymbol{vect}^0$, в которых объекты — пространства ${}^n k$, а морфизмы — $\mathrm{Hom}({}^m k, {}^n k) = \mathcal{M}(m, n, k)$.

$$ {}_k\boldsymbol{vect} \simeq {}_k\boldsymbol{vect}^0 $$

Для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ можем определить правое векторное пространство

$$ k^n := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in k\}. $$

Они образуют подкатегорию $\boldsymbol{vect}_k^0$.
${}_k\boldsymbol{vect}^0$ и $\boldsymbol{vect}_k^0$ — это скелеты категорий ${}_k\boldsymbol{vect}$ и $\boldsymbol{vect}_k$, и можно построить антиизоморфизм

$$ \begin{array}{rcl} {}_k\boldsymbol{vect}^0 & \to & (\boldsymbol{vect}_k^0)^* \\ {}^n k & \rightsquigarrow & k^n \\ \boxed{\begin{array}{ccc} {}^m k & \xrightarrow{x} & {}^n k \\ u & \mapsto & u\,x \end{array}} & \rightsquigarrow & \boxed{\begin{array}{ccc} k^n & \xrightarrow{x} & k^m \\ v & \mapsto & x\,v \end{array}} \end{array} $$

В силу антиизоморфизма ${}_k\boldsymbol{vect}^0 \cong (\boldsymbol{vect}_k^0)^*$, имеем антиэквивалентность

$$ {}_k\boldsymbol{vect} \simeq \boldsymbol{vect}_k^*. $$

Это называется **двойственностью для конечномерных векторных пространств**.

Двойственность можно построить, не обращаясь к скелетам. Пусть V — левое k-векторное пространство, а $V^* := \mathrm{Hom}(V, k)$ — двойственное правое k-векторное пространство. Тогда антиэквивалентность задается так:

$$ U \xrightarrow{f} V \rightsquigarrow V^* \xrightarrow{f^*} U^*, $$

где $f^*\colon \eta \mapsto f\,\eta$.

$$ \begin{tikzcd} U \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed, "f\,\eta"'] & & V \arrow[dl, "\eta"] \\ & k & \end{tikzcd} $$

Для конечномерных пространств существует естественный изоморфизм $V^{**} \cong V$. Здесь звездочки $*$ обозначают два разных функтора: $F\colon {}_k\boldsymbol{vect} \to \boldsymbol{vect}_k$ и $G\colon \boldsymbol{vect}_k \to {}_k\boldsymbol{vect}$, таких что $F\,G \cong \mathbf{1}_{{}_k\boldsymbol{vect}}$ и $G\,F \cong \mathbf{1}_{\boldsymbol{vect}_k}$.

Естественного изоморфизма между V^* и V *не существует*, и он возникает только при замене категории.

- $V^* \cong V$ в **категории конечномерных векторных пространств с фиксированным базисом**.

- $V^* \cong V$ в **категории конечномерных векторных пространств с невырожденными билинейными формами**.

  В ней объектами являются пары (V, B_V), где $B_V\colon V \times V \to k$ — билинейная форма, для которой выполняется условие невырожденности:

$$ u \neq 0 \Rightarrow \exists v \; B(u, v) \neq 0, $$
$$ v \neq 0 \Rightarrow \exists u \; B(u, v) \neq 0. $$

Морфизмы $f\colon (U, B_U) \to (V, B_V)$ — это линейные отображения $U \to V$, которые сохраняют билинейные формы:

$$\begin{tikzcd} U \times U \arrow[rr, "f\times f"] \arrow[dr, "B_U"'] & & V \times V \arrow[dl, "B_V"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

$$B_U(u, v) = B_V(f(u), f(v)).$$

Изоморфизм $V^* \cong V$ дает отображение

$$\begin{array}{rcl} V & \to & V^*, \\ u & \mapsto & B_V(u, -). \end{array}$$

Упражнение 11.1. *Дописать эту конструкцию и показать естественность изоморфизма.*

11.3 Еще одно описание эквивалентности категорий

Определение 11.8. Для функтора $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ рассмотрим отображение

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)), \\ \varphi & \mapsto & F(\varphi). \end{array}$$

- Если это отображение инъективно для всех X и Y, то F называется **строгим** (*faithful*).
- Если это отображение сюръективно для всех X и Y, то F называется **полным** (*full*).

Утверждение 11.4. *Пусть $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ — ковариантный функтор. Он является эквивалентностью категорий iff*

1. *F строгий и полный.*
2. *Для всякого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ существует $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, такой что $Y \cong F(X)$.*

Доказательство — Букур–Деляну или Гельфанд–Манин.

Дальше мы рассмотрим три важных примера антиэквивалентности категорий:

- двойственность Понтрягина,
- аффинные алгебраические многообразия,
- теория Галуа.

11.4 Двойственность Понтрягина

Определение 11.9 (Отто Шрайер, 1926)**.** G называется **топологической группой**, если G снабжена топологией и непрерывным умножением $(x, y) \mapsto x\,y$ и взятием обратного элемента $x \mapsto x^{-1}$.

Категория $\mathcal{TopGrp}$ топологических групп состоит из топологических групп и непрерывных гомоморфизмов между ними. $\mathcal{LCAb}$ — категория абелевых локально компактных групп — является полной подкатегорией в $\mathcal{TopGrp}$.

Утверждение 11.5 (Двойственность Понтрягина)**.** *Существует антиэквивалентность категорий*

$$\mathcal{LCAb} \simeq \mathcal{LCAb}^*.$$

Категория компактных абелевых групп $\mathcal{CAb}$ и категория (дискретных) абелевых групп $\mathcal{Ab}$ являются полными подкатегориями в $\mathcal{LCAb}$. Из двойственности Понтрягина выводится антиэквивалентность

$$\mathcal{CAb} \simeq \mathcal{Ab}^*.$$

Функтор $\widehat{\ }\colon \mathcal{LCAb} \to \mathcal{LCAb}^*$, дающий двойственность Понтрягина, устроен так:

$$G \rightsquigarrow \widehat{G} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{TopGrp}}(G, \mathbb{T}),$$

где $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$.

Групповая структура на $\widehat{G}$ — это поточечное произведение характеров:

$$(\varphi\,\psi)(g) := \varphi(g)\,\psi(g).$$

$\widehat{G}$ снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Сейчас мы разберем, что это такое.

Пусть U — окрестность 1 в топологической группе G. Рассмотрим

$$\begin{aligned} U_d &:= \{(x, y) \in G \times G \mid x\,y^{-1} \in U\}, \\ U_s &:= \{(x, y) \in G \times G \mid x^{-1}\,y \in U\}. \end{aligned}$$

Базу **системы окружений** в G задает множество

$$\{U_d \mid U \text{ — окрестность 1 в } G\}.$$

Соответственно, на G возникает **равномерная структура**.

Определение 11.10. X называется **равномерным пространством**, если задано подмножество $B \subseteq X \times X$ **окружений равномерной структуры**, таких что

1. B является ультрафильтром:

$$\begin{gathered} U, V \in B \Rightarrow U \cap V \in B, \\ U \in B, U \subseteq V \Rightarrow V \in B. \end{gathered}$$

2. Для всякого $U \in B$ выполняется $\Delta_x \subseteq U$, где

$$\Delta_x := \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

3. Для всякого $U \in B$ найдется $V \in B$, такое что $V' \subseteq U$, где

$$V' := \{(y, x) \mid (x, y) \in V\}.$$

4. Для всякого $U \in B$ найдется $V \in B$, такое что $V \cdot V \subseteq U$, где

$$V \cdot V := \{(x, y) \mid \exists z \in X\ (x, z), (z, y) \in V\}.$$

Определение 11.11. Отображение $(X, B_X) \xrightarrow{f} (Y, B_Y)$ называется **равномерно непрерывным**, если для всякого $U \in B_U$ выполняется $(f \times f)^{-1}(U) \in B_X$.

Имеем категорию $\mathcal{Unif}$ равномерных пространств и равномерных отображений.

Так как мы просто ввели дополнительную структуру, напоминающую обычную топологию, то существует забывающий функтор $\mathcal{Unif} \to \mathcal{Top}$.

На любой топологической группе существует две равномерные структуры, правая и левая, но для абелевых (и локально компактных) групп они совпадают.

Определение 11.12. Пусть X — любое множество, и Y — равномерное пространство. Пусть $U \in B_Y$ — окружение. Определим $U_X \subseteq Y^X \times Y^X$

$$U_X := \{(f, g) \mid f, g \colon X \to Y, \quad \forall x \in X \ (f(x), g(x)) \in U\}.$$

U_X возьмем за базу системы окружений в Y^X. Соответствующая топология называется **топологией равномерной сходимости** на Y^X.

Определение 11.13. Топологией сходимости на компактных подмножествах называется самая слабая топология, которая при ограничении всякое компактное $X \subseteq G$ индуцирует определенную выше топологию на Y^X.

Утверждение 11.6 (Теорема Понтрягина)**.** *Имеется естественный изоморфизм топологических групп*

$$G \cong \widehat{\widehat{G}}.$$

$$x \mapsto (\varphi \xmapsto{ev_x} \varphi(x)).$$

Соответствующий функтор на стрелках устроен так:

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & G \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \mathbb{T} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{G} & \xrightarrow{\widetilde{f}} & \widetilde{H}, \\
\varphi & \mapsto & f\varphi.
\end{array}$$

Это квазиобратный сам к себе контравариантный функтор ($\widehat{f\,g} = \widehat{g}\,\widehat{f}$).

Пример: $\widehat{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}$, $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$; $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

Если G — компактная группа, то $\widehat{G}$ — дискретная. Если G — дискретная группа, то $\widehat{G}$ — компактная. Если G — конечная абелева группа, то $G \cong \widehat{G}$, однако это не естественный изоморфизм (в то время как изоморфизм $G \cong \widehat{\widehat{G}}$, как мы сказали, уже естественный).

11.5 Аффинные алгебраические многообразия

В рамках всего этого раздела, пусть k — алгебраически замкнутое поле.

Определение 11.14. Пространство точек $\mathbb{A}^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in k\}$ называется **аффинным пространством**.

Определение 11.15. Пусть $f_1, \dots, f_\ell \in k[x_1, \dots, x_n]$ — многочлены от n переменных. **Аффинным алгебраическим многообразием** $V(f_1, \dots, f_\ell)$ называется множество их общих нулей:

$$V(f_1, \dots, f_\ell) := \{a \in \mathbb{A}^n \mid f_1(a) = \dots = f_\ell(a) = 0\}.$$

Понятно, что вместо общих нулей $f_1, \dots, f_\ell$ можно рассмотреть общие нули многочленов из идеала $I = (f_1, \dots, f_\ell)$, порожденного $f_1, \dots, f_\ell$. То, что мы ограничиваемся конечным множеством из ℓ многочленов несущественно, потому что по теореме Гильберта о базисе, всякий идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$ является конечно порожденным.

Мы имеем такое соответствие между идеалами в кольце $k[x_1, \dots, x_n]$ и аффинными алгебраическими многообразиями:

$$k[x_1, \dots, x_n] \supseteq I \ \mapsto \ V(I) \subseteq \mathbb{A}^n.$$

В другую сторону, можно сопоставить всякому подмножеству $X \subseteq \mathbb{A}^n$ идеал, состоящий из зануляющихся на X многочленов:

$$I(X) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \text{ для всех } a \in X\}.$$

Имеем соответствие

$$\mathbb{A}^n \supseteq X \ \mapsto \ I(X) \subseteq k[x_1, \dots, x_n].$$

Определение 11.16. Топологией Зариского на $\mathbb{A}^n$ называется такая топология, в которой замкнутыми являются аффинные алгебраические многообразия.

Это действительно топология:

- $\varnothing = V(1)$, $\mathbb{A}^n = V(0)$.
- Если $X_1 = V(I_1)$ и $X_2 = V(I_2)$, то $X_1 \cup X_2 = V(I_1 \cdot I_2)$.
- Если $X_\alpha = V(I_\alpha)$ для семейства алгебраических многообразий X_α (не обязательно конечного), тогда $\bigcap_\alpha X_\alpha = V(\bigcap_\alpha I_\alpha)$.

На подмногообразии $X \subseteq \mathbb{A}^n$ возникает индуцированная топология.

Заметим, что иногда $V(I)$ называют **аффинным алгебраическим множеством**, а алгебраическим многообразием называется неприводимое алгебраическое множество. (Множество X **неприводимое**, если его нельзя представить в виде объединения собственных замкнутых подмножеств $X = X_1 \cup X_2$.) Здесь мы не следуем такой терминологии.

Определение 11.17. Замыкание по Зарискому для подмножества $X \subseteq \mathbb{A}^n$ есть алгебраическое многообразие $V(I(X)) = \overline{X}$.

Определение 11.18. Радикалом для идеала $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ называется идеал

$$\operatorname{Rad}(I) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f^r \in I \text{ для некоторого } r = 1, 2, \dots\}.$$

(Проверьте, что это действительно идеал!)

Утверждение 11.7 (Теорема Гильберта о нулях, Nullstellensatz)**.** *Как и раньше, мы предполагаем, что k — алгебраически замкнутое поле. Для всякого идеала $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$*

$$I(V(I)) = \operatorname{Rad}(I).$$

Имеется соответствие

$$\begin{aligned} \text{максимальный идеал } \mathfrak{m} \subset k[X] \quad &\leftrightarrow \quad \text{точка } x \in X \\ \text{простой идеал } \mathfrak{p} \subset k[X] \quad &\leftrightarrow \quad \text{замкнутое подмногообразие } Y \subseteq X \end{aligned}$$

Теорема о нулях устанавливает антиэквивалентность некоторых категорий. Сейчас мы разберемся, каких.

Определение 11.19. Категория $\mathcal{AffVar}_k$ аффинных алгебраических многообразий имеет в качестве объектов алгебраические многобразия, а в качестве морфизмов — **регулярные отображения** $X \xrightarrow{f} Y$, то есть отображения

$$\begin{array}{rcl} X & \to & Y, \\ a & \mapsto & (f_1(a), \ldots, f_\ell(a)), \end{array}$$

где $f_1, \ldots, f_\ell \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Причем морфизмы $X \xrightarrow{f} Y$ рассматриваются по модулю $I(X)$.

В частности, множество $\mathrm{Reg}(X, k)$ регулярных отображений между X и $\mathbb{A}^1$ есть **координатное кольцо**

$$k[X] := k[x_1, \ldots, x_n]/I(X).$$

$k[X]$ — это конечно порожденная алгебра и в ней нет нетривиальных нильпотентов. Такой объект называется **аффинной алгеброй**.

Если имеется регулярное отображение $X \xrightarrow{f} Y$, то ему соответствует отображение аффинных алгебр в обратную сторону $k[Y] \xrightarrow{f^*} k[X]$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & Y \arrow[dl, "\varphi"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

У нас получился контравариантный функтор $\mathcal{AffVar}_k \to \mathcal{AffAlg}_k$ между категорией аффинных алгебраических многообразий $\mathcal{AffVar}_k$ и категорией аффинных алгебр $\mathcal{AffAlg}_k$. На самом деле, это антиэквивалентность категорий.

$$\mathcal{AffVar}_k \simeq \mathcal{AffAlg}_k^*.$$

Антиэквивалентность следует из того, что

- $I(V(I)) = I$ для радикального идеала I (такого что $I = \mathrm{Rad}(I)$).
- $V(I(X)) = X$ для алгебраического многообразия X.

(Мы обсудили только то, как по алгебраическому многообразию X получается алгебра $k[X]$, но можно и строить алгебраическое многообразие по алгебре — это несложно придумать из рассказа выше или прочитать в учебниках.)

Рекомендуемые книги для тех, кто заинтересовался алгебраической геометрией:

- Майлс Рид, *Алгебраическая геометрия для всех.*
- Дэвид Мамфорд, *Красная книга о многообразиях и схемах.*
- David Eisenbud, Joe Harris, *The Geometry of Schemes.*
- Робин Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.*

Аффинная алгебраическая геометрия над алгебраически замкнутым полем — это далеко не единственный пример теории, в которой используется эквивалентность некоторой категории геометрических объектов (многообразий) и категории алгебраических объектов (колец / модулей / алгебр с дополнительной структурой).

- Можно работать с некоммутативными кольцами и рассматривать двойственные к ним объекты. Получается **некоммутативная алгебраическая геометрия**. Cf. `http://mathoverflow.net/questions/10512/theories-of-noncommutative-geometry`

- **Теория Гельфанда** работает с двойственностью

  $$\text{компактное хаусдорфово пространство } X \ \leftrightarrow\ \text{нормированное кольцо комплексных функций } \mathbb{C}(X).$$

  TBW: хорошо бы добавить ссылку на соответствующую книгу или обзор (видимо, это всё берет начало из `http://mi.mathnet.ru/umn7036`).

- **Diffiety** работает с двойственностью

  $$\text{гладкое многообразие } X \ \leftrightarrow\ \text{гладкая алгебра } \mathbb{C}^\infty(X).$$

  Об этом см. книгу Джет Неструев, *Гладкие многообразия и наблюдаемые.*

11.6 Теория Галуа

Теория Галуа изучает расширения полей. Мы пока для простоты будем считать, что у нас все расширения конечномерные, $|L : K| < \infty$.

Определение 11.20. Расширение полей L/K называется **расширением Галуа**, если оно нормальное и сепарабельное.

Утверждение 11.8. *Рассмотрим расширение полей L/K. Если это расширение Галуа, то существует соответствие между подполями в L, содержащими K, и подгруппами в **группе Галуа** $\mathrm{Gal}(L/K)$:*

$$K \le F \le L \ \leftrightarrow\ H \le \mathrm{Gal}(L/K),$$

где $\mathrm{Gal}(L/K)$ — группа автоморфизмов, оставляющих на месте элементы K:

$$\mathrm{Gal}(L/K) := \mathrm{Aut}_K(L) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(L) \mid \varphi|_K = 1_K\}.$$

Соответствие устроено так:

$$\begin{aligned} L^H &\leftarrow\!\shortmid\ H, \\ F &\mapsto \mathrm{Gal}(L/F). \end{aligned}$$

$$L^H := \{x \in L \mid \forall \varphi \in H \quad \varphi(x) = x\}.$$

$$\begin{aligned} H_1 \le H_1 &\Rightarrow L^{H_2} \le L^{H_1}, \\ F_1 \le F_2 &\Rightarrow \mathrm{Gal}(L/F_2) \le \mathrm{Gal}(L/F_1). \end{aligned}$$

Для каждого поля K существует его **алгебраическое замыкание** $\overline{K}$ (единственное с точностью до изоморфизма). См. Lang, *Algebra*, V.§2. Это не обязательно конечное расширение — например, $\mathbb{Q}_{alg}/\mathbb{Q}$ не конечно.

Определение 11.21. Группа $\mathrm{Gal}(K) := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ называется **абсолютной группой Галуа** поля K.

Например, вычислена $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p)$ при $p \neq 2$; при $p = 2$ задача не решена. Структура группы $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q})$ — это большой вопрос науки.

Определение 11.22. Для конечных расширений L/K можно рассмотреть подгруппы $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L) \leq \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ (они имеют конечный индекс). **Топологией Крулля** на $\mathrm{Gal}(K)$ называется топология, в которой базой окрестностей единицы служат такие подгруппы $\mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$.

Основная теорема теории Галуа в форме Крулля устанавливает соответствие

$$K \leq L \leq \overline{K} \;\leftrightarrow\; \text{замкнутые подгруппы в } \mathrm{Gal}(K).$$

Определение 11.23. X называется G**-множеством**, если на нем задано **действие** G слева, т.е. отображение $G \times X \mapsto X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$, такое что

$$\begin{aligned} (h\,g) \cdot x &= h \cdot (g \cdot x), \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Морфизмом G-множеств (**эквивариантным отображением**) называется такое отображение $f\colon X \to Y$, что

$$f(g \cdot x) = g \cdot f(x).$$

$G\text{-}\mathcal{S}et$ — это категория G-множеств и эквивариантных отображений.

Определение 11.24. Категория групповых действий состоит из пар (G, X), где X — G-множество, и морфизмов $\varphi \times f$, при которых следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} G \times X \arrow[r] \arrow[d, "\varphi\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ H \times Y \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

(горизонтальные стрелки — это действия групп).

Нас будут интересовать конечные G-множества и непрерывные действия $G \times X \to X$ (где X снабжается дискретной топологией).

Утверждение 11.9 (Основная теорема теории Галуа)**.** *Существует антиэквивалентность категорий*

$$\mathcal{T}op\text{-}G\text{-}\mathcal{S}et \simeq \mathcal{A}_K^*.$$

Здесь $\mathcal{A}_K$ — категория сепарабельных K-алгебр.

TBW: где это всё подробно написано? Автору конспекта известна книга Régine et Adrien Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, Chapitre 5 (там всё как раз в терминах антиэквивалентности категорий).

12 Образующие и кообразующие категорий

Определение 12.1. Элемент $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ называется **образующей** категории, если

1. Для всякого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \varnothing$.

2. Для всякой пары различных морфизмов $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ существует морфизм $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, такой что $h\,f \neq h\,g$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] & Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Z \end{tikzcd}$$

Определение 12.2. Элемент $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ называется **кообразующей** категории, если это образующая в $\mathcal{C}^*$. То есть,

1. Для всякого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ имеем $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \neq \varnothing$.
2. Для всякой пары различных морфизмов $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ существует морфизм $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, такой что $f\,h \neq g\,h$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Z \arrow[r, "h"] & X \end{tikzcd}$$

- В $\mathcal{S}et$ кообразующей является любое множество X, такое что $|X| \geq 2$.
- В $\mathcal{S}et_\bullet$ любое множество, отличное от $\{\bullet\}$, является образующей.
- В $vect_k$ всякое ненулевое векторное пространство является образующей и кообразующей.
- В $\mathcal{G}rp$ и $\mathcal{A}b$ образующей является группа $\mathbb{Z}$.
- В категории $\mathcal{A}b$ кообразующая — это $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- В категории $\mathcal{G}rp$ кообразующих нет (существуют простые группы любой мощности).

Остается в качестве упражнения подумать о образующих и кообразующих в других категориях, например $\mathcal{T}op$, $\mathcal{C}omp\mathcal{T}op$, $\mathcal{O}rd$.

Категория, двойственная к конкретной категории, сама является конкретной. Например, интересно узнать, как выглядит категория $\mathcal{S}et^*$. А именно, $\mathcal{S}et^*$ изоморфна некоторой подкатегории $\mathcal{S}et$.

Пусть Z — кообразующая в $\mathcal{S}et$ (образующая в $\mathcal{S}et^*$). Рассмотрим контравариантный функтор $F\colon \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$

$$\begin{aligned} X &\quad\rightsquigarrow\quad \mathrm{Map}(X, Z), \\ X \xrightarrow{f} Y &\quad\rightsquigarrow\quad \mathrm{Map}(Y, Z) \xrightarrow{F(f)} \mathrm{Map}(X, Z). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] & & Y \arrow[dl, "h"] \\ & Z \arrow[ul, dashed, "h\,f"] & \end{tikzcd}$$

- Если $X \neq Y$, то $\mathrm{Map}(X, Z) \cap \mathrm{Map}(Y, Z) = \varnothing$, то есть $F(X) \neq F(Y)$.
- Если $f, g \in \mathrm{Map}(X, Y)$ — различные морфизмы, то найдется такой морфизм $h \in \mathrm{Map}(Y, Z)$, что $h\,f \neq h\,g$, то есть $F(f) \neq F(g)$.

F — это вложение, и образ этого вложения изоморфен $\mathcal{S}et^*$.

13 Абелевы категории

Говорят, что 20 декабря речь шла о абелевых категориях. Конспекта нет, но в любом случае, абелевы категории предполагалось (?) изучать весной. Слушатели могут прислать свои записки в группу `coxeter@googlegroups.com`.

Ссылки:

- С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин, *Введение в гомологическую алгебру*, II.§5.
- `http://ncatlab.org/nlab/show/abelian+category`
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Abelian_category`

14 Теория топосов

Мы начинаем изучать теорию топосов. Полезные источники:

- Р. Голдблатт, *Топосы. Категорный анализ логики* — для начинающих.
- П. Т. Джонстон, *Теория топосов* — продвинутое изложение.

Когда говорят «топос», имеют в виду одно из двух:

1. **Топос Гротендика** в алгебраической геометрии (Александр Гротендик, начало 60-х).
2. **Элементарный топос** в логике (William Lawvere, Myles Tierney, конец 60-х).

Исторически понятие топоса происходит именно от Гротендика, который ввел его при определении этальных когомологий схем (SGA 4, exposé IV), но элементарный топос — это более общее и более простое понятие. Дальше мы будем понимать под топосом как раз элементарный топос, а к топосам Гротендика вернемся как к одному из примеров.

14.1 Определение элементарного топоса

Итак, топос — это такая категория, которая удовлетворяет аксиомам, в некотором смысле обобщающим свойства категории $\mathcal{S}et$. А именно, в категории $\mathcal{S}et$:

1. Можно на категорном языке определить объекты $\mathbf{0} = \varnothing$ (как универсальный отталкивающий объект) и $\mathbf{1} = \{\varnothing\}$ (как универсальный притягивающий объект). Кроме того, в некотором смысле категорно характеризуются $\cap$ и $\cup$, через расслоенное произведение и копроизведение.

$$\begin{tikzcd}
X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook, "i_Y"] \arrow[ddr, bend left] & \\
X \arrow[r, hook, "i_X"'] \arrow[drr, bend right] & X \cup Y \arrow[dr, dashed] & \\
& & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \cap Y \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_Y"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{pr}_X"'] & Y \arrow[d, hook] \\
& X \arrow[r, hook] & X \cup Y
\end{tikzcd}$$

   Когда мы говорим о том, что нечто описывается на категорном языке, мы, разумеется, имеем в виду, что определенная категорная конструкция дает нужный объект *с точностью до изоморфизма.*

2. Отображения $X \to Y$ образуют множество $Y^X = \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(X, Y)$, т.е. снова объект $\mathcal{S}et$. Иными словами, в категории имеется **экспоненцирование**, которое по X и Y дает объект Y^X с соответствующими свойствами.

3. Существует **классификатор подобъектов** $\Omega = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Это означает, что каждому подмножеству $Y \subseteq X$ соответствует морфизм $X \xrightarrow{\chi_Y} \Omega$.

$$\chi_Y(x) := \begin{cases} \mathbf{0}, & x \notin Y, \\ \mathbf{1}, & x \in Y. \end{cases}$$

(Подмножество — это не категорное понятие, но морфизм — уже категорное!)

Сейчас мы подумаем над тем, как эти свойства можно переработать в набор аксиом, имеющих смысл не только для $\mathcal{S}et$, но и для произвольной категории $\mathcal{C}$. Это и будет определение топоса.

Во-первых, потребуем, чтобы в $\mathcal{C}$ существовали все конечные пределы и копределы. Это равносильно существованию универсального отталкивающего объекта $\mathbf{0}$ и универсального притягивающего объекта $\mathbf{1}$, а также конечных расслоенных произведений и копроизведений.

В категории $\mathcal{S}et$ существует естественная биекция

$$\mathrm{Map}(Z, \mathrm{Map}(X, Y)) \cong \mathrm{Map}(Z \times X, Y).$$

А именно, функции $z \mapsto (g_z \colon X \to Y)$ можно сопоставить функцию $(z, x) \mapsto g_z(x)$. Подобное можно определить для произвольной категории $\mathcal{C}$:

Определение 14.1. Говорят, что в категории существует **экспоненцирование**, если в ней существуют конечные произведения и копроизведения, и для любых двух объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ существует объект $Y^X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, такой что для всех $Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ возникает естественная биекция

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y).$$

Если объект Y^X существует, то он единственный с точностью до изоморфизма.

Естественную биекцию $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \times X, Y)$ можно получить так: скажем, что объект Y^X по определению является экспонентой, если он возникает вместе с морфизмом

$$ev \colon Y^X \times X \to Y,$$

так что для всякого морфизма $Z \times X \xrightarrow{g} Y$ существует единственный морфизм $Z \xrightarrow{\widehat{g}} Y^X$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
Y^X \arrow[dr, "ev"] & \\
& Y \\
Z \times X \arrow[uu, dashed, "\widehat{g}\times 1_X"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Для экспонент можно доказать ожидаемые свойства, аналогичные тем, что выполняются в категории $\mathcal{S}et$:

Утверждение 14.1. *Пусть в $\mathcal{C}$ существуют конечные пределы и копределы и экспоненцирование. Тогда для всех $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ выполняется*

1. $\mathbf{0} \times X \cong \mathbf{0}$.
2. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \mathbf{0}) \neq \varnothing \Rightarrow X \cong \mathbf{0}$ *(в $\mathbf{0}$ отображается только $\mathbf{0}$).*
3. *Если $\mathbf{0} \cong \mathbf{1}$, то все объекты изоморфны.*
4. $\mathbf{0} \to X$ *— мономорфизм.*

5. $X^{\mathbf{1}} \cong X$.

6. $X^{\mathbf{0}} \cong \mathbf{1}$.

7. $\mathbf{1}^X \cong \mathbf{1}$.

(Вывод этих свойств из определений остается в качестве упражнения.)

Осталось разобраться с тем, как в произвольной категории вводится понятие подобъекта. У нас нет понятия *вложения* $Y \hookrightarrow X$, как в случае $\mathcal{S}et$, но есть понятие *мономорфизма* $Y \rightarrowtail X$. Для двух мономорфизмов $Y \overset{f}{\rightarrowtail} X$ и $Z \overset{g}{\rightarrowtail} X$ мы говорим, что $f \subseteq g$, если существует морфизм $Y \xrightarrow{h} Z$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, tail, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\
& X \\
Z \arrow[ur, tail, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Для такого отношения на мономорфизмах выполняется

1. $f \subseteq f$.
2. $f \subseteq g, g \subseteq h \Rightarrow f \subseteq h$.
3. $f \subseteq g \subseteq f \Rightarrow f \cong g$ (это мы берем за определение изоморфизма f и g).

Классом подобъектов объекта $X \in \mathrm{Ob}(X)$ называется

$$\mathrm{Sub}(X) := \{[f] \mid f \colon Y \rightarrowtail X\},$$

где $[f]$ — класс всех мономорфизмов $Z \rightarrowtail X$, изоморфных f.

Sub — это контравариантный функтор ($X \to Y \rightsquigarrow \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$).

Вспомним теперь, что в $\mathcal{S}et$ каждому подмножеству $Y \subseteq X$ сопоставляется морфизм $X \xrightarrow{\chi_Y} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Это означает, что для всякого вложения $Y \hookrightarrow X$ существует единственный морфизм χ_Y, такой что возникает декартов квадрат

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Y \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "\chi_Y"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "t"'] & \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}
\end{tikzcd}
$$

Это мотивирует следующее определение в рамках произвольной категории.

Определение 14.2. Пусть $\mathcal{C}$ — категория с конечными пределами и копределами. **Классификатором подобъектов** в $\mathcal{C}$ называется объект $\Omega \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ вместе с морфизмом $\mathbf{1} \xrightarrow{t} \Omega$, таким что для каждого мономорфизма $f \colon Y \rightarrowtail X$ существует единственный морфизм $X \xrightarrow{\chi_f} \Omega$, делающий следующий квадрат декартовым:

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& Y \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & X \arrow[d, "\chi_f"] \\
& \mathbf{1} \arrow[r, "t"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

Если классификатор подобъектов существует, то он единственный с точностью до единственного изоморфизма. Классификатор подобъектов связан с функтором подобъектов Sub следующим каноническим изоморфизмом:

$$\mathrm{Sub}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega).$$

(**TBW**: это нужно обдумать: всё таки Hom действует в $\mathcal{S}et$, а образует ли множество $\mathrm{Sub}(X)$?)

Всё сказанное выше даёт нам понятие топоса.

Определение 14.3. Категория $\mathcal{C}$ называется (**элементарным**) **топосом**, если

1. В $\mathcal{C}$ существуют конечные пределы и копределы.
2. В $\mathcal{C}$ существует экспоненцирование.
3. В $\mathcal{C}$ существует классификатор подобъектов.

Так как всё наше построение моделирует свойства категории $\mathcal{S}et$, то тривиальные примеры топосов — $\mathcal{S}et$ и $\mathcal{F}in\mathcal{S}et$ (категория конечных множеств). Далее мы рассмотрим менее тривиальные примеры.

14.2 Структура топоса на $\mathcal{S}et \times \mathcal{S}et$

Рассмотрим произведение категорий $\mathcal{S}et \times \mathcal{S}et$. В такой категории объекты — это пары $\langle A, B\rangle$, а стрелки — пары $\left\langle A \xrightarrow{f} B, C \xrightarrow{g} D \right\rangle$.

- Универсальный притягивающий объект — это $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \langle \{\mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}\}\rangle$, универсальный отталкивающий объект — $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle = \langle \varnothing, \varnothing\rangle$.
- Классификатор подобъектов есть $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} \times \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
- Экспоненцирование тоже получается очевидным образом: $\langle C, D\rangle^{\langle A, B\rangle} := \left\langle C^A, D^B \right\rangle$.

Понятно, что в этом примере никак не используется специфика $\mathcal{S}et$, и верно более общее

Утверждение 14.2. *Если $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — топосы, то $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ — тоже топос.*

14.3 Структура топоса на $\mathcal{M}ap$

Рассмотрим теперь **категорию отображений** $\mathcal{M}ap$, имеющую в качестве объектов стрелки $A \xrightarrow{f} B$, а в качестве морфизмов — пары стрелок, делающих соответствующую диаграмму коммутативной:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}
$$

В этой категории существуют пределы и копределы.

Универсальный притягивающий объект — $\{\varnothing\} \to \{\varnothing\}$. Универсальный отталкивающий объект — $\varnothing \to \varnothing$.

Подобъектами в категории служат **подфункции**. $C \xrightarrow{g} D$ называется подфункцией $A \xrightarrow{f} B$ (обозначение $g \subseteq f$), если

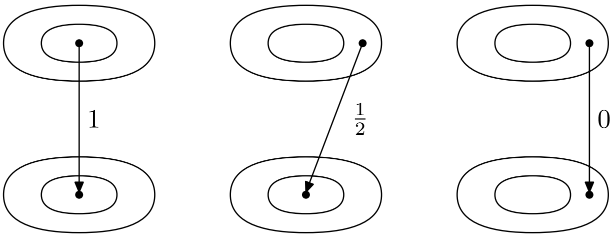
1. $C \subseteq A$.

2. $D \subseteq B$.

3. $g(x) = x$ для всех $x \in C$ (т.е. $f|_C = g$).

Для элемента $x \in A$ возникает три варианта:

$$\psi(x) := \begin{cases} 1, & x \in C \text{ (и тогда обязательно } g(x) \in D\text{);} \\ \frac{1}{2}, & x \notin C \text{ и } g(x) \in D; \\ 0, & x \notin C \text{ и } g(x) \notin D. \end{cases}$$



Это задает классификатор подобъектов $\Omega\colon \{0, \frac{1}{2}, 1\} \to \{0, 1\}$.

(Разобрать подробности и экспоненцирование остается в качестве упражнения; см. Голдблатт, §4.4, пример 5.)

Пример с $\mathcal{S}et \times \mathcal{S}et$ и $\mathcal{M}ap$ на самом деле является частным случаем более общего факта:

Теорема 14.1. *Если $\mathcal{C}$ — малая категория, то категория* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$ *является топосом.*

Упражнение 14.1. *Разобрать, как на* $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{S}et)$ *возникает структура топоса, если категория $\mathcal{C}$ имеет такой вид:*

1) $\bullet \rightrightarrows \bullet$

2)
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \\ & \bullet & \end{tikzcd}$$

3)
$$\begin{tikzcd} & \bullet & \\ \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

4) $\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$

14.4 Структура топоса на G-$\mathcal{S}et$ и M-$\mathcal{S}et$

Пусть M — моноид, и задано его действие $M \times X \xrightarrow{act} X$ слева на множестве X. Тогда мы говорим, что X — **левое M-множество**, и пишем «$M \curvearrowright X$».

Действие означает, что выполняются следующие аксиомы:

1. $(h\,g) \cdot x = h \cdot (g \cdot x)$ для всех $h, g \in M$, $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} M \times M \times X \arrow[r, "1_M \times act"] \arrow[d, "mult \times 1_X"'] & M \times X \arrow[d, "act"] \\ M \times X \arrow[r, "act"'] & X \end{tikzcd}$$

2. $1 \cdot x = x$ для всех $x \in X$.

$$\begin{tikzcd}
\{\bullet\} \times X \arrow[rr, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[dr, "1\times 1_X"'] & & X \\
& M \times X \arrow[ur, "act"'] &
\end{tikzcd}$$

Множества с действием моноида M образуют категорию M-$\mathcal{S}et$. Морфизмами в нем являются **эквивариантные отображения**, т.е. такие отображения $X \xrightarrow{\varphi} Y$, при которых следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
M \times X \arrow[r, "act_X"] \arrow[d, "1_M \times \varphi"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
M \times Y \arrow[r, "act_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x) \quad \text{для всех } g \in M, x \in X.$$

Частным случаем является категория G-$\mathcal{S}et$ множеств с действием *группы* G (вспомним, что мы уже встречались с чуть более сложной категорией $\mathcal{T}op$-G-$\mathcal{S}et$ в примере с теорией Галуа).

Утверждение 14.3. *M-$\mathcal{S}et$ является топосом.*

Это следует из того, что M-$\mathcal{S}et$ изоморфна категории $\mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$, где моноид M рассматривается как категория с одним объектом M.

- Функтор $\Phi\colon \mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et) \to M$-$\mathcal{S}et$ строится таким образом: объекту $(F\colon M \to \mathcal{S}et) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et))$ сопоставим $F(M) \in \mathrm{Ob}(M$-$\mathcal{S}et)$ с действием $m \cdot x := F(m) \cdot x$. Естественному преобразованию $\tau\colon F \Rightarrow G$ функторов $F, G\colon M \to \mathcal{S}et$ сопоставим отображение $F(M) \xrightarrow{\tau_M} G(M)$. Оно эквивариантное по определению естественного преобразования:

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(M) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(M) \arrow[r, "\tau_M"'] & G(M)
\end{tikzcd}$$

- Функтор $\Psi\colon M$-$\mathcal{S}et \to \mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$ такой. Для M-множества X определим $\Psi(X) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et))$

$$\begin{aligned}
M &\rightsquigarrow X, \\
(M \xrightarrow{m} M) &\rightsquigarrow (x \mapsto m \cdot x).
\end{aligned}$$

Для эквивариантного отображения $X \xrightarrow{f} Y$ определим естественное преобразование $\Psi(f)\colon \Psi(X) \Rightarrow \Psi(Y)$:

$$\begin{tikzcd}
\Psi(X)(M) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Psi(X)(m)"'] & \Psi(Y)(M) \arrow[d, "\Psi(X)(m)"] \\
\Psi(X)(M) \arrow[r, "f"'] & \Psi(Y)(M)
\end{tikzcd}$$

Остается проверить, что $\Phi\,\Psi = \mathbf{1}$ и $\Psi\,\Phi = \mathbf{1}$.

Таким образом, мы построили изоморфизм между M-$\mathcal{S}et$ и $\mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$, где M — малая категория. Значит M-$\mathcal{S}et$ — топос.

Теперь было бы полезно понять, какова структура этого топоса.

В силу изоморфизма M-$\mathcal{S}et \cong \mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$, конечные пределы и копределы вычисляются «поточечно».

- Универсальный отталкивающий объект $\mathbf{0}$ есть множество $\varnothing$ с пустым действием моноида.
- Универсальный притягивающий объект $\mathbf{1}$ есть множество $\{\bullet\}$ с очевидным действием моноида.
- Произведение $A \times B$ двух M-множеств есть декартово произведение $A \times B$, снабженное действием $m \cdot (a, b) := (m \cdot a, m \cdot b)$.
- Копроизведение $A \sqcup B$ двух M-множеств есть несвязное объединение $A \sqcup B := (A \times \{1\}) \cup (A \times \{2\})$, снабженное действием $m \cdot (a, 1) := (m \cdot a, 1)$, $m \cdot (b, 2) := (m \cdot b, 2)$.

Опять же, благодаря изоморфизму M-$\mathcal{S}et \cong \mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$, получаем, что

- Стрелка в M-$\mathcal{S}et$ является мономорфизмом iff она является мономорфизмом в $\mathcal{S}et$.
- Стрелка в M-$\mathcal{S}et$ является эпиморфизмом iff она является эпиморфизмом в $\mathcal{S}et$.

Подмножество $S \subseteq M$, замкнутое по умножению слева на элементы M (т.е. $\forall m \in M \forall s \in S\; m{\cdot}s \in S$), называется **левым идеалом**. В частности, $\varnothing$ и M — это наименьший и наибольший идеал в M. (Кроме того, моноид является группой iff $L_M = \{\varnothing, M\}$.)

Классификатор подобъектов в категории $\mathrm{Funct}(M, \mathcal{S}et)$ есть $\Omega := L_M$, множество левых идеалов в M, и для каждого элемента моноида $M \xrightarrow{m} M$

$$\Omega(m)\, S := \{x \in M \mid x\, m \in S\} \quad \text{для } S \in L_M.$$

Отображение $\mathbf{1} \xrightarrow{t} \Omega$ переводит $\bullet$ в $M \in L_M$.

Классификатор подобъектов в категории M-$\mathcal{S}et$ есть множество $\Omega := L_M$, снабженное действием

$$m \cdot S := \{x \in M \mid x \cdot m \in S\}.$$

14.5 Структура топоса на $\mathcal{S}et_X$

Фиксируем объект $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S}et)$. Рассмотрим категорию $\mathcal{S}et_X$, в которой объектами являются отображения $Y \xrightarrow{f} X$ (**расслоения с базой** X), а морфизмами — отображения $Y \xrightarrow{h} Z$ между разными пространствами расслоения, делающие следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Конечно, такую категорию $\mathcal{C}_X$ можно ввести для произвольной категории $\mathcal{C}$ и объекта $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Имеет место важный факт:

Теорема 14.2 (P.J. Freyd)**.** *Если $\mathcal{C}$ — топос, то $\mathcal{C}_X$ — тоже топос.*

Можно разобраться, что происходит в простейшем примере $\mathcal{Set}_X$. Классификатором подобъектов служит тривиальное расслоение со слоем $\{0,1\}$, то есть $X \times \{0,1\} \xrightarrow{\mathrm{pr}_X} X$. Экспоненцирование $(Y \xrightarrow{f} X)^{(Z \xrightarrow{g} X)}$ устроено так:

$$\begin{array}{c} \coprod\limits_{x\in X} Y_x^{Z_x} \\ \big\downarrow \\ X \end{array}$$

Здесь $Y_x := f^{-1}(x)$ — **слой** над x. (См. Голдблатт, §4.5.)

15 Пучки

15.1 Категория $\mathcal{Sh}(X)$

Пучок — это важнейшее понятие математики. Например, многообразие (топологическое, гладкое, аналитическое, алгебраическое, и т. п.) — это пространство с пучком функций на нем.

Пусть X — фиксированное топологическое пространство. С ним можно связать категорию $\mathcal{Open}(X)$, в которой объектами являются открытые подмножества $U \subseteq X$, а морфизмами — включения $i\colon U \hookrightarrow V$. То есть,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Open}(X)} := \begin{cases} \{i\}, & U \subseteq V, \\ \varnothing, & U \not\subseteq V. \end{cases}$$

Определение 15.1. Предпучком на топологическом пространстве X называется контравариантный функтор $\mathcal{F}\colon \mathcal{Open}(X)^* \to \mathcal{C}$.

В конкретных примерах на месте $\mathcal{C}$ стоит категория множеств, групп, абелевых групп, колец, R-модулей, и т. п. Дальше можно про всё думать, представляя себе конкретные категории.

Если переписать определение предпучка более многословно, то получается сопоставление

$$\begin{aligned} U &\rightsquigarrow \mathcal{F}(U), \\ V \subseteq U &\rightsquigarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho_{UV}} \mathcal{F}(V). \end{aligned}$$

Элемент $s \in \mathcal{F}(U)$ называется **сечением** предпучка $\mathcal{F}$ над открытым множеством U; элемент $s \in \mathcal{F}(X)$ называется **глобальным сечением**. Отображение $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\rho_{UV}} \mathcal{F}(V)$ называется **ограничением**. Вместо $\rho_{UV}(s)$ часто пишут $s|_V$.

Функториальность означает, что выполняются условия

1. $\rho_{UU} = 1_{\mathcal{F}(U)}$.
2. Если $W \subseteq V \subseteq U$, то $\rho_{UW} = \rho_{UV} \circ \rho_{VW}$.

Было бы хорошо, если бы ограничения согласовывались. А именно, пусть имеется сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ и сечение $t \in \mathcal{F}(V)$, такие что $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$. Тогда хотелось бы сказать, что существует единственное сечение $r \in \mathcal{F}(U \cup V)$, такое что $r|_U = s$ и $r|_V = t$. Увы, из определения предпучка ничего такого не следует — r может не существовать или не быть единственным.

Самый простой пример: фиксируем $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и зададим **постоянный предпучок** $\mathcal{F}$, такой что $\mathcal{F}(U) := A$ для всех $U \subseteq X$, $U \neq \varnothing$, и $\mathcal{F}(\varnothing) := \{\bullet\}$. Пусть теперь $U \cap V = \varnothing$. Тогда для $s \in \mathcal{F}(U) = A$ и $t \in \mathcal{F}(V) = A$, таких что $s \neq t$ имеем $s|_\varnothing = t|_\varnothing$, но s и t не получаются как ограничения какого-то сечения r над $U \cup V$.

Определение 15.2. Пучком называется предпучок, для которого выполняется **аксиома пучка**: для всякого открытого покрытия U_i всякого открытого множества $U \subseteq X$ и любых согласованных сечений $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ (т.е. $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$) существует единственное сечение $s \in \mathcal{F}(U)$, такое что $s|_{U_i} = s_i$.

Наше обсуждение определения предпучка, а также определение пучка, ссылаются на элементы $s \in \mathcal{F}(U)$, то есть подразумевают, что $\mathcal{C}$ — конкретная категория. Этого можно избежать, сформулировав **аксиому пучка в форме Гротендика**. Пусть в $\mathcal{C}$ существуют произведения. Мы требуем, чтобы возникали отображения

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{e} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \underset{d_2}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

так что e является уравнителем d_1 и d_2, то есть $e\, d_1 = e\, d_2$.

Здесь

- e — произведение отображений ограничения $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U_i)$,
- d_1 — произведение отображений ограничения $\mathcal{F}(U_j) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$,
- d_1 — произведение отображений ограничения $\mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

В качестве упражнения остается доказательство того, что для конкретной категории это совпадает с нашей аксиомой пучка.

Пучки на топологическом пространстве X образуют категорию $\mathcal{Sh}(X)$. Как можно догадаться, морфизм двух пучков $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G}$ — это естественное преобразование $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ как контравариантных функторов $\mathcal{Open}(X)^* \to \mathcal{C}$. То есть, для всех $V \subseteq U$ возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V) \\ \mathcal{F}(U) \arrow[u] \arrow[r, "f_U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Здесь возникает чрезвычайно важный вопрос: что должна означать инъективность / сюръективность морфизма пучков? Это мы обсудим далее. Кроме того, далее мы покажем, что пучки множеств на топологическом пространстве образуют топос (чтобы понять, как в таком топосе выглядит экспонента и классификатор подобъектов, необходимо обсудить еще несколько вопросов).

15.2 Пучок сечений расслоения

Выше мы уже приводили категорию расслоений $\mathcal{Set}_X$ как пример топоса, но сейчас мы немного уточним, что такое расслоение. Под **расслоением** мы будем понимать *непрерывное* отображение $Y \xrightarrow{\pi} X$ *топологических пространств* Y и X.

Сечением расслоения π над $U \subseteq X$ называется *непрерывное* отображение $U \xrightarrow{s} Y$, такое что $s\,\pi = 1_U$.

Если $\mathcal{F}(U)$ — множество сечений расслоения π над U, то $\mathcal{F}$ является пучком на X.

Обратно, по каждому пучку множеств $\mathcal{F}$ на X можно построить **этальное пространство** (**накрывающее пространство**, *espace étalé*) $\mathrm{Spé}(X)$ и локальный гомеоморфизм $\mathrm{Spé}(X) \xrightarrow{\pi} X$, так что $\mathcal{F}$ будет пучком сечений π.

В этом смысле пучок сечений расслоения — вообще единственный пример пучка. Правда, есть проблема с тем, что пучки в геометрии обычно возникают естественным образом, а этальное пространство — как правило нечто странное.

15.3 Пучок ростков непрерывных функций

- Если X — топологическое пространство, то определим **структурный пучок** $\mathcal{O}_X(U) := C_{\mathbb{R}}(U)$, где $C_{\mathbb{R}}(U)$ — непрерывные функции $U \to \mathbb{R}$. Это пучок.

  Если X — хорошее пространство (хаусдорфово, локально компактное, и т. п.), то X восстанавливается по $\mathcal{O}_X$.

- Если X — гладкое многообразие класса k, то $\mathcal{O}_X(U) := C^k(U)$ также определяет пучок, по которому восстанавливается X.

- Аналогично задаются аналитические многообразия, и т. п.

Пусть $\mathcal{F}$ — пучок над пространством X. Фиксируем точку $x \in X$. **Слоем** (*stalk*) называется предел

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x, U \subseteq X} \mathcal{F}(U).$$

Элементы $\mathcal{F}_x$ называются **ростками локальных сечений** пучка $\mathcal{F}$ в точке x.

Это можно сформулировать иначе. Множество локальных сечений пучка $\mathcal{F}$ есть

$$\mathcal{X}_x := \{(s, U) \mid U \ni x, U \subseteq X,\ s \in \mathcal{F}(U)\}.$$

Введем на $\mathcal{X}_x$ отношение эквивалентности

$$(s, U) \sim (t, V) \iff \exists W \ni x, W \subseteq U \cap V \quad s|_W = t|_V .$$

Классы эквивалентности и есть ростки локальных сечений в точке x, т.е. $\mathcal{F}_x = \mathcal{X}_x/\sim$.

Пример таких ростков — аналитические функции локально представляются рядом Тейлора. (Правда, этот пример тавтологичен и является определением аналитической функции.)

Можно не фиксировать точку x и рассматривать вообще все непустые открытые подмножества $U \subseteq X$. Это будет давать нетривиальные глобальные ростки, только если пространство X не хаусдорфово (скажем, как в алгебраической ситуации).

---

6 марта 2012 г.

15.4 Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории пучков

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — это пучки множеств на пространстве X. Тогда морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ является мономорфизмом iff $\mathcal{F}(U) \xhookrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U)$ — инъекция для любого $U \subseteq X$.

Однако эпиморфизм охарактеризовать таким же образом нельзя. А именно, правильно требовать сюръективности не для всех $U \subseteq X$, а послойно.

Утверждение 15.1. *$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ — это эпиморфизм в категории пучков iff $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{G}_x$ — сюръекция для всех $x \in X$.*

Переведем это на язык сечений. Это эквивалентно тому, что для всякого $U \subseteq X$ и всякого $t \in \mathcal{G}(U)$ найдется открытое покрытие $\{U_i\}$ множества U, и также $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, такие что $\varphi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$. При этом *не верно*, что обязательно существует сечение $s \in \mathcal{F}(U)$, такое что $\varphi_U(s) = t$.

Универсальный принцип: *эпиморфизмы — это не сюръекции на точках.* Для тех, кто знаком с правильным определением алгебраической группы, можно привести такой пример. Существует короткая точная последовательность алгебраических групп

$$1 \to \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1.$$

Но *не* верно, что для конкретного кольца R существует точная последовательность

$$1 \to R^\times \to \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{PGL}_n(R) \to 1.$$

К сожалению, не все это понимают, и где-то можно встретить *ошибочное* определение $\mathrm{PGL}(n, R) := \mathrm{GL}(n, R)/R^\times$ для колец.

На точках возникает точная последовательность

$$1 \to R^\times \to \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{PGL}_n(R) \to H^1(R, \mathbb{G}_m) \to \cdots$$

Здесь $H^1(R, \mathbb{G}_m)$ — **когомологии Галуа** (см. Jean-Pierre Serre, *Cohomologie galoisienne*). Это можно понимать как препятствие к сюръективности.

Аналогично, существует последовательность алгебраических групп

$$1 \to \mu_n \to \mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n \to 1,$$

но на точках это не должно быть точной последовательностью (хотя над алгебраически замкнутым полем это верно).

15.5 Построение ассоциированного пучка по предпучку (sheafification)

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки групп на пространстве X, и $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$ — их морфизм. Как определить ядро и образ морфизма? Самое простое определение, приходящее на ум:

$$\ker(\varphi)(U) := \ker(\varphi_U) \quad \text{для } U \subseteq X.$$

Это действительно задает пучок, и такое определение ядра верное.

Для образа хотелось бы задать $\mathrm{im}(\varphi)(U) := \mathrm{im}(\varphi_U)$, но это *пред*пучок, а не пучок. Это типичная ситуация: естественная конструкция выводит нас за пределы категории пучков, и для результата необходимо взять **ассоциированный пучок**, или, как говорят, **шифифицировать** (**sheafify**) получившийся предпучок.

Определение 15.3. Если $\mathcal{F}$ — предпучок на X, то соответствующим **ассоциированным пучком** называется пучок $\mathcal{F}^+$ на X вместе с морфизмом предпучков $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^+$, универсальным в следующем смысле:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{F}^+ \arrow[dl, dashed, "\exists!"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

Утверждение 15.2. *$\mathcal{F}^+$ вместе с морфизмом θ существует для любого предпучка $\mathcal{F}$ и единственен с точностью до единственного изоморфизма, согласованного с θ.*

Доказательство. Для $U \subseteq X$ зададим

$$\mathcal{F}^+(U) := \{U \xrightarrow{s} \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \text{выполняются свойства 1) и 2)}\}$$

1) $s(x) \in \mathcal{F}_x$ для всех $x \in U$.

2) Существует покрытие $\{U_i\}$ для U и сечение $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, такое что $(s_i)_x = s(x)$ для всех $x \in U_i$.

□

Остается в качестве упражнения проверить, что определенный только что $\mathcal{F}^+$ — это пучок, задать морфизм $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^+$ и показать универсальность.

Послойно шификация совпадает с исходными слоями предпучка: для всех $x \in X$ выполняется $(\mathcal{F}^+)_x = \mathcal{F}_x$.

Если $\mathcal{F}$ — пучок, тогда шификация дает его же: $\mathcal{F}^+ = \mathcal{F}$.

Еще один пример, когда для правильного определения требуется шификация.

Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки абелевых групп. Тогда можно определить подпучок

$$\mathcal{F} \leq \mathcal{G} \iff \mathcal{F}(U) \leq \mathcal{G}(U).$$

Это правильное определение. Однако определять факторпучок в виде $(\mathcal{G}/\mathcal{F})(U) = \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$ *неправильно.* Из обсуждения выше должно быть понятно, что правильное определение должно формулироваться послойно:

$$(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x = \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x.$$

15.6 Этальное пространство

Конструкция **этального пространства** (**накрывающего пространства**, *espace étalé*) была введена в 40-е годы Жаном Лере.

Если $\mathcal{F}$ — предпучок на X, то за $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$ или $\mathrm{Ét}(\mathcal{F})$ обозначается пространство, которое как множество есть

$$\mathrm{Spé}(\mathcal{F}) := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x.$$

Имеем расслоение множеств

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_x & & \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & & X \end{array}$$

На $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$ вводится самая слабая топология, такая что для всякого $U \subseteq X$ и $s \in \mathcal{F}(U)$ отображение

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\widetilde{s}} & \mathrm{Spé}(\mathcal{F}), \\ x & \mapsto & s_x \end{array}$$

непрерывно. (**TBW**: хорошо бы еще на каких-то естественных примерах понять, что там получается за топология, но это всё сложно.)

Проекция $\mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \to X$ непрерывна.

Утверждение 15.3. $\mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \to X$ *является накрытием (локальным гомеоморфизмом) и его непрерывные сечения образуют пучок* $\mathcal{F}^+$.

Если $\mathcal{F}$ — пучок, то получается соответствие $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^+$ (эквивалентность категорий).

15.7 Прямой и обратный образ пучка

Пусть $X \xrightarrow{f} Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Как по пучку на X построить пучок на Y и наоборот?

Если $\mathcal{F}$ — пучок на X, то отображение $X \xrightarrow{f} Y$ задает функтор f_* на категории пучков. **Прямым образом** называется пучок $(f_*\mathcal{F})$ на Y, определяемый как

$$(f_*\mathcal{F})(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \quad \text{для } U \subseteq Y.$$

Если $\mathcal{G}$ — пучок на Y, то **обратным образом** называется пучок $(f^*\mathcal{G})$ на X. Его уже не так просто определить. Можно сделать так:

$$(f^{-1}\mathcal{G})(V) := \varinjlim_{f(V) \subseteq U \subseteq Y} G(U) \quad \text{для } V \subseteq X.$$

$(f^{-1}\mathcal{G})$ — это предпучок. Можно взять $(f^*\mathcal{G}) := (f^{-1}\mathcal{G})^+$. Это *возможный кандидат* на обратный образ.

Упражнение 15.1.
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$
$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)}$.

15.8 Пучок множеств как топос

Теперь у нас имеется достаточно конструкций, чтобы показать, что категория $\mathcal{Sh}(X)$ пучков множеств на X является топосом.

- Для предпучков существуют конечные пределы и копределы. Для пучков они являются пучками.
- Если $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — пучки на X, то $\mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(X)}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ не является пучком, но соответствующий пучок определяется следующим естественным образом. Для $U \xrightarrow{i} X$ зададим ограничение пучка
$$\mathcal{F}|_U := i^*(\mathcal{F}).$$
Теперь пусть
$$\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})\colon U \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{Sh}(U)}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U).$$
Это действительно пучок, и в категории $\mathcal{Sh}(X)$ он обладает свойством экспоненты.
- Классификатором подобъектов служит пучок открытых множеств
$$\Omega(U) := \{V \underset{\text{откр.}}{\subseteq} U\}.$$

---

13 марта 2012 г.

16 Топологии Гротендика

16.1 Решёта

Теорема 16.1. *Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория. Тогда категория $\mathcal{PreSh}(\mathcal{C})$ предпучков множеств на $\mathcal{C}$ образует топос.*

(После продолжительного обсуждения предпучков на топологическом пространстве напомним, что для произвольной категории $\mathcal{C}$ категория предпучков множеств — это категория функторов $\mathcal{C}^* \to \mathcal{Set}$.)

Самое интересное в структуре топоса $\mathcal{PreSh}(\mathcal{C})$ — классификатор подобъектов. Мы хотим описать подфункторы представимого функтора
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)\colon Y \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X).$$

Для топологических пространств **решетом** на X называется набор открытых подмножеств $S \subseteq \mathcal{Open}(X)$, такой что $U \in S, V \subseteq U \Rightarrow V \in S$. Это можно аксиоматизировать и переформулировать не в терминах открытых подмножеств, а в терминах стрелок в произвольной категории $\mathcal{C}$.

Решетом (англ. *sieve*, фр. *crible*) на X называется множество S морфизмов $Y \xrightarrow{f} X$, таких что для всякого морфизма $Z \xrightarrow{g} Y$
$$(Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X) \in S.$$

Примеры решет:

- Если $\mathcal{C}$ — моноид, то решето — это левый идеал.
- Если $\mathcal{C}$ — частично упорядоченное множество, то решето — это порядковый идеал.
- Для всякого X имеем **максимальное решето**

$$t(X) := \{Y \xrightarrow{f} X\}.$$

Утверждение 16.1. *Задание решета S на X соответствует заданию подфунктора в* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$.

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $F \subseteq \mathrm{Hom}(-, X)$. Тогда можно определить решето

$$S := \{Y \xrightarrow{f} X \mid f \in F(Y)\}.$$

$\Leftarrow$ Пусть S — решето на X. Тогда можно определить подфунктор $F \subseteq \mathrm{Hom}(-, X)$:

$$F\colon Y \rightsquigarrow \{Y \xrightarrow{f} X \mid f \in S\}.$$

□

Пусть S — решето на X и $Z \xrightarrow{h} X$ — некоторый морфизм. Тогда можно определить решето на Z

$$h^*(S) := \{Y \xrightarrow{g} Z \mid g\,h \in S\}.$$

Эта конструкция называется **заменой базы** или **pullback'ом S вдоль h** (существования pullback'ов в категории $\mathcal{C}$ мы не подразумеваем).

Теперь мы опишем классификатор подобъектов в категории $\mathcal{PreSh}(\mathcal{C})$. Определим

$$\Omega(X) := \{\text{решета на } X \text{ в категории } \mathcal{C}\}.$$

Пусть имеется морфизм $Z \xrightarrow{h} X$. Тогда определим

$$\begin{array}{ccc} \Omega(X) & \xrightarrow{\Omega(h)} & \Omega(Z), \\ S & \mapsto & h^*(S). \end{array}$$

Это задает контравариантный функтор Ω на X, то есть предпучок.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{true} & \Omega(X), \\ \bullet & \mapsto & t(X). \end{array}$$

Пусть имеется контравариантный функтор $P\colon \mathcal{C}^* \to \mathcal{Set}$ и подфунктор $Q \subseteq P$. Для каждого элемента $x \in P(X)$ определим

$$\varphi_X(x) := \{Y \xrightarrow{f} X \mid P(f)_x \in Q(Y)\}.$$

Это решето на X. Имеем отображение $\varphi_X\colon P(X) \to \Omega(X)$. Оно задает естественное преобразование функторов $\varphi\colon P \Rightarrow \Omega$.

Возникает декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{1} \arrow[d, "true"] \\ P \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

16.2 Сайт Гротендика и топос Гротендика

Пусть $\{U_i\}_{i\in I}$ — открытые множества, покрывающие пространство X. Мы хотим обобщить эту ситуацию, а именно, аксиоматизировать следующие свойства покрытия:

1. $\bigcup U_i = X$.
2. **Замена базы** (pullback): если $Y \subseteq X$, то $\{U_i \cap Y\}$ образуют открытое покрытие Y.
3. **Аксиома транзитивности**: если $\bigcup_{j\in I_i} U_{ij} = U_i$ для каждого $i \in I$ и $\bigcup_{i\in I} U_i = X$, тогда $\bigcup_{\substack{i\in I,\\ j\in I_i}} = U_{ij}$.

Топология Гротендика на малой категории $\mathcal{C}$ задается множеством **покрывающих решет** на каждом $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{J}(X).$$

При этом выполняются аксиомы

1. $t(X) \in \mathcal{J}(X)$.
2. Если $S \in \mathcal{J}(X)$ и $Z \xrightarrow{h} X$, тогда $h^*(S) \in \mathcal{J}(S)$.
3. Пусть $S \in \mathcal{J}(X)$ и R — какое-то решето, так что для всякого $(Y \xrightarrow{f} X) \in S$ выполняется $f^*(R) \in \mathcal{J}(Y)$. Тогда $R \in \mathcal{J}(X)$.

Пара $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ из малой категории и покрывающих решет называется **сайтом**. Категория $\mathcal{Sh}(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ пучков на сайте $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ образует топос. Он называется **топосом Гротендика**.

Тривиальные примеры:

1. Тривиальная топология: $\mathcal{J}(X) := \{t(X)\}$.
2. Дискретная топология: $\mathcal{J}(X) := \{$все решета на $X\}$.

Свойства, вытекающие из аксиом:

3′. Пусть $S \in \mathcal{J}(X)$. Если для всех $(Y_f \xrightarrow{f} X) \in S$ задано решето $R_f \in \mathcal{J}(Y_f)$, то

$$\{g\,f \mid f \in S, g \in R_f\} \in \mathcal{J}(X).$$

(Если $S \in \mathcal{J}(X)$, то любое решето $R \supset S$ также лежит в $\mathcal{J}(X)$.)

4. **Аксиома пересечения**: если $R, S \in \mathcal{J}(X)$, то $R \cap S \in \mathcal{J}(X)$.

Говорят, что решето на X **покрывает** морфизм $Z \xrightarrow{h} X$, если $h^*(S) \in \mathcal{J}(Z)$.
В этих терминах аксиомы топологии Гротендика можно сформулировать так.

1. Если S — решето на X и $f \in S$, то S покрывает f.
2. Если S покрывает $Z \xrightarrow{h} X$, то S покрывает и композицию $W \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} X$ с произвольным морфизмом $W \xrightarrow{g} Z$.
3. Если S покрывает $Z \xrightarrow{h} X$ и R — решето на X, которое покрывает все $f \in S$, то R покрывает h.

(В качестве упражнения остается проверка того, что эти аксиомы эквивалентны тем, что приведены выше.)

20 марта 2012 г.

16.3 Предтопология Гротендика

Решето, порожденное покрытием $R = \{U_i\}_{i\in I}$ есть семейство

$$(R) = \{U \in \mathcal{Open}(X) \mid \exists i\ U \subseteq U_i\}.$$

Теперь, как мы уже делали выше, это определение можно сформулировать в терминах стрелок в произвольной категории (с парой технических ограничений).

Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория с pullback'ами.

Пусть имеется правило K, сопоставляющее каждому $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ некоторый набор $K(X)$ множеств морфизмов с кообластью X. Элементы $K(X)$ называются **покрытиями** X. Правило K называется **предтопологией Гротендика** (или **базой топологии Гротендика**), если выполнены следующие аксиомы:

1. Если $f\colon Y \xrightarrow{\cong} X$ — изоморфизм, то $\{f\} \in K(X)$.

2. Согласованность с pullback'ами:

$$\begin{tikzcd} Y_i \times_X Z \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[d, "f_i"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

3. Если $\{Y_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i\in I} \in K(X)$ и для каждого $i \in I$ имеем $\{Z_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} Y_i\}_{j\in I_i} \in K(Y_i)$, тогда $\{Z_{ij} \xrightarrow{g_{ij}} Y_i \xrightarrow{f_i} X\}_{\substack{i\in I,\\ j\in I_i}} \in K(X)$.

Всякая предтопология Гротендика K на $\mathcal{C}$ определяет (порождает) топологию Гротендика $\mathcal{J}$ на $\mathcal{C}$:

$$(R) := \{g\,f \mid f \in R,\ \mathrm{Cod}(g) = \mathrm{Dom}(f)\},$$
$$\mathcal{J}(X) := \{(R) \mid R \in K(X)\}.$$

И обратно, каждой топологии Гротендика $\mathcal{J}$ на $\mathcal{C}$ соответствует единственная *наибольшая* предтопология K на $\mathcal{C}$, которая порождает $\mathcal{J}$:

$$K(X) := \{R \mid (R) \in \mathcal{J}(X)\}.$$

16.4 Примеры топологий Гротендика

Пусть $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Top}$ — подкатегория в категории топологических пространств, замкнутая относительно конечных пределов и открытых подпространств. Например, $\mathcal{T}_2$ — категория хаусдорфовых пространств.

Топология открытых покрытий (*open cover topology*) на $\mathcal{C}$ получается из такой предтопологии, где $\{Y_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i\in I} \in K(X)$, если

1. Y_i открыто в X.

2. f_i — это вложение $Y_i \hookrightarrow X$.

3. $\bigcup Y_i = X$.

- **Малый сайт** на $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ — это подкатегория $\mathcal{Open}(X) \subseteq \mathcal{Top}$, снабженная топологией открытых покрытий.

- **Большой сайт** — это все $\mathcal{Open}(X)$ с такой топологией.

- **Большой сайт над** X — это топология на категории стрелок $Y \to X$, где Y — всевозможные объекты $\mathcal{C}$.

Большая топология задается $\{Y_i \xrightarrow{f_i} X\}_{i \in I} \in K(X)$ для сюръективных стрелок $\coprod Y_i \xrightarrow{\sqcup f_i} X$.

16.5 Отступление из коммутативной алгебры: локализация

Подмножество $S \subseteq R$ коммутативного кольца R называется **мультипликативным**, если $1 \in S$, $0 \notin S$ и $x\,y \in S$ для всех $x, y \in S$.

Для мультипликативного подмножества S **локализацией** называется кольцо $S^{-1}R$ вместе с гомоморфизмом $R \xrightarrow{F_S} S^{-1}R$, так что

1. $F_S(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$.

2. Морфизм F_S универсален среди всех морфизмов $R \xrightarrow{f} A$, таких что $f(S) \subseteq A^\times$:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "F_S"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}R \\ & A \arrow[ur, dashed, "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

Утверждение 16.2. *Для всякого мультипликативного подмножества $S \subseteq R$ существует единственная с точностью до изоморфизма локализация $S^{-1}R$.*

Доказательство. Рассмотрим пары $(x, y) \in R \times S$. Введем на них отношение эквивалентности

$$(x, y) \sim (u, v) \iff (x\,v - y\,u)\,w = 0 \text{ для некоторого } w \in S.$$

Тогда на $S^{-1}R := (R \times S)/\sim$ можно ввести умножение и сложение ($\frac{x}{y}$ обозначает класс эквивалентности пары (x, y)):

$$\frac{x}{u} \cdot \frac{y}{v} := \frac{x\,y}{u\,v},$$
$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} := \frac{x\,v + u\,y}{u\,v}.$$

Непосредственно проверяется, что получилось корректное определение коммутативного кольца, которое и является локализацией. □

Пусть $s \in R$ — не нильпотент. Он порождает **главную мультипликативную систему** $S = \langle s \rangle = \{1, s, s^2, s^3, \ldots\}$. Локализация обозначается $R[\frac{1}{s}]$ или R_s и называется **главной локализацией**.

Примеры локализации знакомы всем из начальной школы: $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^{-1}\,\mathbb{Z}$ — кольцо рациональных чисел и $\mathbb{Z}[\frac{1}{10}]$ — кольцо десятичных дробей.

Собственный идеал кольца $\mathfrak{m} \subset R$ называется **максимальным**, если он максимален по включению. Множество максимальных идеалов обозначается за $\mathrm{Specm}(R)$.

Собственный идеал кольца $\mathfrak{p} \subset R$ называется **простым**, если для $a\,b \in \mathfrak{p}$ всегда выполняется $a \in \mathfrak{p}$ или $b \in \mathfrak{p}$. Множество простых идеалов обозначается за $\mathrm{Spec}(R)$.

Упражнение 16.1.
- *Если $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, то он является простым.*

- $\mathrm{Nil}(R) = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p}$, *где* $\mathrm{Nil}(R)$ — ***нильрадикал****, множество всех нильпотентных элементов ($s^n = 0$ для некоторого n).*

Как видно, $\mathfrak{p}$ простой iff $R \setminus \mathfrak{p}$ — мультипликативное подмножество. Локализация $(R \setminus \mathfrak{p})^{-1}R$ обозначается за $R_\mathfrak{p}$.

Если мы последовательно локализуем кольцо по разным элементам, то результат не зависит от порядка локализации.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
R_s \arrow[dr] & & R_t \arrow[dl] \\
 & R_{st} &
\end{tikzcd}$$

$$S^{-1}R = \varinjlim_{s \in S} R_s.$$

16.6 Топология Зариского

Вспомним пример из раздела 11.5, где описывалась антиэквивалентность категории $\mathcal{AffAlg}_k$ аффинных k-алгебр и категории $\mathcal{AffVar}_k$ аффинных алгебраических многообразий над k (для алгебраически замкнутого k). Мы не имеем возможности подробно развить этот сюжет, но скажем, что морально, существует двойственность

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{\text{коммутативные кольца с 1}} & \leftrightarrow & \boxed{\text{аффинные схемы}} \\
R & \leftrightarrow & X = \mathrm{Spec}(R) \\
R \to S_i & \leftrightarrow & Y_i \to X
\end{array}$$

Поэтому мы позволим себе не говорить о схемах, а просто думать про двойственную категорию $\mathcal{Ring}^*$.

Топология Зарисского определяется $\{R \xrightarrow{F_{s_i}} R_{s_i}\}_{i=1,\dots,m} \in K_{Zar}(R)$, где $s_i \in R$ — не нильпотенты и $s_1 R + \dots + s_m R = R$ или $s_1 + \dots + s_m = 1$.

Это предтопология Гротендика на категории $\mathcal{Ring}^*$ (проверьте аксиомы!).

Геометрически, смысл локализации следующий: если кольцу R соответствует двойственный объект $X = \mathrm{Spec}(R)$, то локализации R_s соответствует двойственный объект $U_s = \mathrm{Spec}(R_s) = X \setminus V(s)$ — то, что называется **главным открытым подмножеством**.

На категории схем можно определить еще много разных топологий — **этальную топологию**, **топологию Нисневича**, **fppf** (*fidèlement plate de présentation finie*), **fpqc** (*fidèlement plate quasi-compacte*), и т. п. Они играют разную роль в разных задачах и науках.

A Словарь

В категорной терминологии иногда возникает путаница, поэтому все возможные синонимы и переводы терминов собраны в табличку ниже.

terminal object, *universally attracting object*, унив. притягивающий объект	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ X \end{tikzcd}$	*initial object*, *universally repelling object*, унив. отталкивающий объект	$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "\exists!"] \\ \bullet \end{tikzcd}$
product, произведение	$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & A \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$	*coproduct*, копроизведение	$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i_1"] \arrow[ddr, bend right] & & B \arrow[dl, "i_2"'] \arrow[ddl, bend left] \\ & A \sqcup B \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\ & \bullet & \end{tikzcd}$
pullback, *fibered product*, *Cartesian square*, расслоенное произведение, декартов квадрат, коуниверсальный квадрат	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A \times_C B \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$	*pushout*, *fibered coproduct*, *cocartesian square*, *amalgamated sum*, расслоенное копроизведение, декартов коквадрат, кодекартов квадрат, универсальный квадрат	$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddr, bend left] & \\ A \arrow[r, "i_1"'] \arrow[drr, bend right] & A \sqcup_C B \arrow[dr, dashed, "\exists!"] & \\ & & \bullet \end{tikzcd}$
limit, предел	$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & C \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\ F(X) \arrow[rr, "F(f)"'] & & F(Y) \end{tikzcd}$	*colimit*, копредел	$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\varphi_X"] \arrow[ddr, bend right] & & F(Y) \arrow[dl, "\varphi_Y"'] \arrow[ddl, bend left] \\ & C \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\ & \bullet & \end{tikzcd}$
inverse limit, *projective limit*, $\varprojlim$, обратный предел, проективный предел	$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\ & X \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ X_i & & X_j \arrow[ll, "f_i^j"] \end{tikzcd}$	*direct limit*, *injective limit*, $\varinjlim$, прямой предел, инъективный предел	$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "f_j^i"] \arrow[dr, "f^i"'] \arrow[ddr, bend right] & & X_j \arrow[dl, "f^j"] \arrow[ddl, bend left] \\ & X \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \\ & \bullet & \end{tikzcd}$